DS Physique 7

EC : Thermo

Durée : 3h. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique.

$$k_b = 1.4 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}} \qquad R = 8.31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$$

Rappels de cinématique :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{polaire}} \qquad \vec{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\theta \end{bmatrix}_{\text{polaire}}$$

1 Questions de cours

Mécanique du solide.

1. On considère un solide dont le moment d'inertie par rapport à un axe Δ vaut : I_Δ. Ce solide est en rotation autour de Δ à la vitesse angulaire $\dot\theta > 0$ connue. Donner son énergie cinétique de rotation.
2. Sur ce même solide, un couple de frottement fluide visqueux de coefficient η s'exerce. Donner l'expression de la puissance fournie par ce couple au solide.
3. Commenter le signe du résultat précédent.

Thermodynamique.

4. Quel est le lien entr k_b et R ?
5. Donner la définition de l'énergie interne d'un système thermodynamique.
6. Donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'une particule qui possède 3 degrés de libertés, si cette particule appartient à un système en contact avec un thermostat à la température T_e.
7. Donner l'expression de l'énergie interne d'un système qui contient N_0 particules sans interactions les unes avec les autres, si le système est en contact avec un thermostat à la température T_e.

2 Mécanique du solide

On cherche à prédire la valeur de la puissance mécanique récupérable par une éolienne. On modélise l'hélice d'une éolienne par un solide quasiment plan, et dont la forme est donnée par la figure ci-dessous.

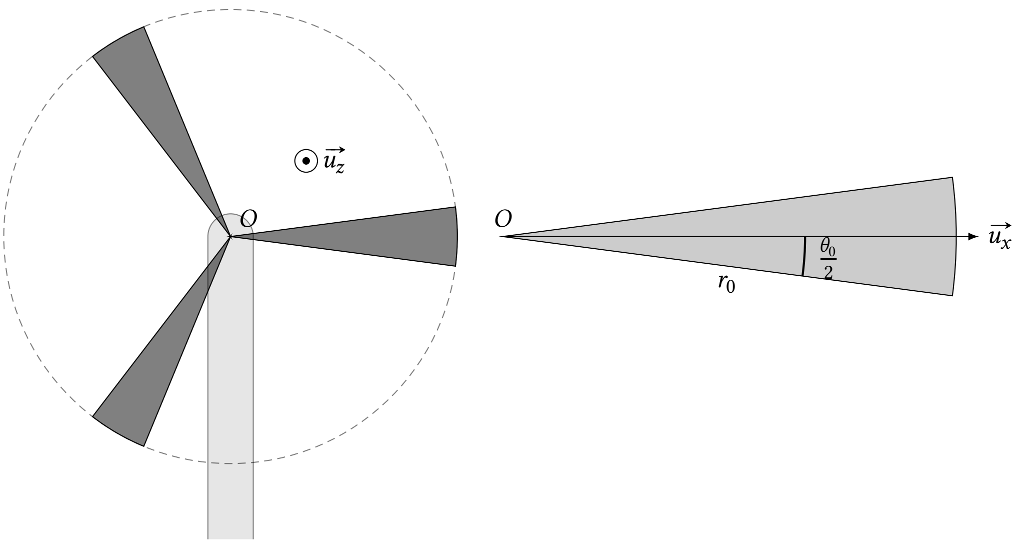

Figure 1 – À gauche, l'éolienne complète vue de face (vent dans le dos), à droite : les dimensions d'une pale. La forme des hélices n'est pas triangulaire, ce sont des portions de disques.

On considère une éolienne à trois pales, dont les dimensions sont $r_0 = 30$ m et $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$. L'axe $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (O, \vec{u_z})$ est la liaison pivot autour de laquelle l'éolienne peut tourner.

2.1 Détermination du moment d'inertie de l'hélice

On connait la densité de masse surfacique d'une pale : $\sigma = 4\,\text{kg/m}^2$. Cela signifie que la masse d'un point de surface élémentaire dS est d$m = \sigma\,$dS.

1. Donner l'expression d'un petit élément de surface, situé autour d'un point P repéré en coordonnées polaires. Donner votre réponse en fonction de r, dr et dθ. Vérifiez que votre résultat est bien homogène à une surface.

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

2. Donner le domaine de valeur de θ et de r des coordonnées (r, θ) d'un point quelconque pour couvrir l'ensemble des points d'une pale. En déduire la masse totale d'une pale. En déduire la masse m_h de l'hélice complète (constituée des trois pales).

$$m_1 = \int \mathrm{d}m \implies m = \iint_{\theta=-\frac{\theta_0}{2}, r=0}^{\theta=\frac{\theta_0}{2}, r=r_0} \sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\sigma r_0^2 \theta_0$$

Soit :

$$m_{helice} = \sigma\theta_0 \frac{3}{2} r_0^2$$

3. Faire l'application numérique pour la masse de l'hélice.

$$m_h \approx 1000\,\text{kg}$$

C'est lourd. Mais en même temps, c'est des pales de 30 m de long.

4. Rappeler la définition du moment d'inertie total J d'un solide par rapport à Δ.

5. En déduire que le moment d'inertie de l'hélice est :

$$J = \frac{1}{2} m_h r_0^2$$

$$J_1 = \int \mathrm{d}m\, r^2 \implies J_1 = \sigma\theta_0 \frac{r_0^4}{4}$$

ça, c'est le moment d'inertie d'une seule pale. Le moment d'inertie de l'hélice est la somme des moments d'inerties des trois pales.

2.2 Dynamique de l'hélice

On nomme ω la vitesse angulaire de rotation de l'hélice autour de Δ. On suppose qu'il existe un vent constant de vitesse $-v_0\vec{u_z}$. On admet que dans ce contexte, la forme des hélices fait que le vent exerce sur l'hélice un couple $\vec{\Gamma_v} = \alpha v_0^2 \vec{u_z}$ avec $\alpha = 1 \times 10^4$ kg. L'axe de rotation de l'hélice est relié à un moteur qui exerce un couple $\vec{\Gamma_m} = -\eta\omega\vec{u_z}$, avec $\eta = 1 \times 10^6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. On admet que le centre de masse de l'hélice est situé en O. On suppose que l'hélice a, à $t = 0$, une vitesse angulaire nulle.

6. Justifiez que le moment des forces de pesanteur exercées sur l'hélice est nul.

Tout se passe comme si les forces de pesanteurs s'appliquaient en O, donc le moment des forces de pesanteur est nul.

7. Appliquer le théorème du moment cinétique pour déterminer $\omega(t)$ la vitesse angulaire de rotation de l'hélice.

$$J\dot{\omega} = \alpha v_0^2 - \eta\omega \implies \omega(t) = \frac{\alpha v_0^2}{\eta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{J}t}\right)$$

8. Déterminer la vitesse angulaire maximale atteinte par l'hélice.

$$\omega^{max} = \frac{\alpha v_0^2}{\eta}$$

9. Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre cette vitesse.

$$\tau = \frac{J}{\eta}$$

10. Donner l'expression de la puissance mécanique fournie par le vent à l'éolienne, en fonction de α, η et v_0.

11. Commenter la dépendance de cette puissance avec la vitesse du vent.

$P \propto v_0^4$ donc quand il y a du vent, ça fournit de l'énergie, mais dès qu'il n'y a plus de vent, c'est nul.

On suppose que le vent souffle à une vitesse $v_0 \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Dans ces conditions, lorsque la vitesse angulaire de l'hélice est maximale, on observe expérimentalement qu'elle vaut $\omega^{\max} \approx 10$ tours par minute.

12. Quelle est la puissance fournie par le vent à l'éolienne dans ces conditions ? Faire l'application numérique.

Attention, le tour par minute n'est pas une unité SI. La conversion donne $w^{max} \approx 1\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

$$P = \alpha v_0^2 \omega_m \approx 10^6\,\mathrm{W}$$

13. Combien d'éolienne de ce type (et qui fonctionnent dans ces conditions) faut-il pour produire autant qu'un réacteur nucléaire ($P \approx 900\,\mathrm{MW}$)

3 Thermodynamique

Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille à parois indéformables, de volume V_b, on utilise un compresseur constitué (voir figure) d'un cylindre nommé c, de deux soupapes S et S' et d'un piston, mobile sans frottement entre les positions extrêmes AA' et BB'.

Lors de l'aller (phase d'aspiration) la soupape S est ouverte alors que S' est fermée ; on a alors admission de l'air atmosphérique dans c à la pression P_a. Lors de cette étape la pression dans c est constante. Lors du retour (phase de compression), l'air dans c est tout d'abord comprimé, de la pression P_a à la pression P_b, S et S' étant fermées. La soupape S restant fermée, la soupape S' s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient supérieure à celle de la bouteille P_b. Quand le piston est en AA', le volume limité par le piston et la section CC' est V_{min} ; quand le piston est en BB', ce volume est égal à V_{max}. Les transformations de l'air sont isothermes (les températures dans le cylindre et dans la bouteille sont identiques, égales à la température T_a de l'atmosphère) ; l'air est toujours considéré comme un gaz parfait.

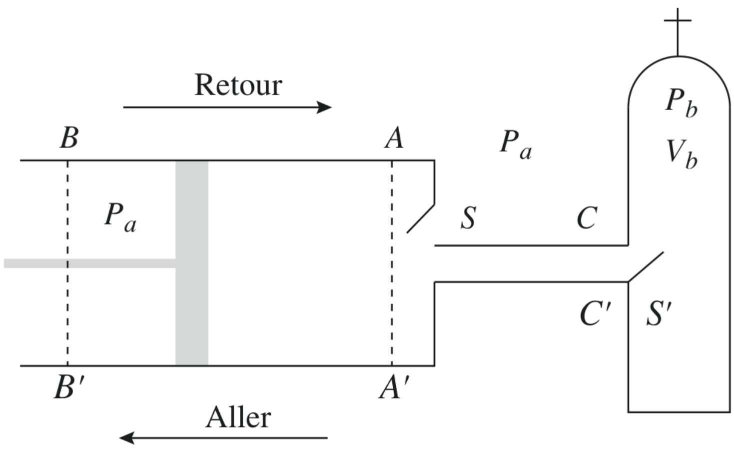

FIGURE 2 – Compresseur à gauche, bouteille à remplir à droite.

La pompe n'ayant pas encore fonctionné, l'état initial du système est le suivant :

- Bouteille : pression $P_b = P_a$, température $T_b = T_a$.
- Cylindre : pression P_a, température T_a, position du piston : AA'

Le piston fait un aller et un retour.

1. Justifier que lors de toutes les étapes où l'on considère un système fermé, le produit PV est constant.

Lorsque la température est constante, le produit PV est constant pour un gaz parfait.

2. Tracer soigneusement les deux étapes de cet aller-retour dans un diagramme $P_{cyl.}V_{cyl.}$.

   Lors de l'aller, la pression est constante, égale à P_a, car la soupape S est ouverte et le volume augmente en passant de V_{min} jusqu'à V_{max}. Notez que lors de cette étape, le système n'est pas fermé. Lors du retour, la pression augmente en suivant la loi $P = \dfrac{n_i RT}{V_{tot}}$ et le volume diminue.

3. Déterminer la pression P_b à l'intérieur de la bouteille à la fin de cette transformation.

$$P_a(V_b + V_{max}) = P_b(V_{min} + V_b) \implies P_b = P_a \frac{V_b + V_{max}}{V_b + V_{min}}$$

4. En déduire, sous l'hypothèse $V_{min} \ll V_b$, la variation Δn de gaz contenu dans la bouteille.

$$n_f = \frac{P_b V_b}{RT}$$

   et

$$n_i = \frac{P_a V_b}{RT}$$

   Donc

$$\Delta n = \frac{V_b}{RT}(P_b - P_a) = \frac{P_a V_b}{RT}\frac{V_{max} - V_{min}}{V_b + V_{min}} \approx P_a \frac{V_{max} - V_{min}}{RT}$$

   On peut aussi tomber sur $\Delta n \approx P_a \dfrac{V_{max}}{RT_a}$ si on fait l'approximation $V_{min} \ll V_b$ plus tôt dans le calcul.

5. Faire l'application numérique pour : $P_a = 1\ atm$, $V_b = 5 \times 10^{-3}\ m^3$, $V_{min} = 2 \times 10^{-5}\ m^3$, $V_{max} = 2.4 \times 10^{-3}\ m^3$, $T_a = 300\ K$

$$\Delta n = 10^{-6}\ \text{mol}$$

Le compresseur ayant fonctionné, on considère qu'à un instant t donné, la soupape S est ouverte alors que la soupape S' est fermée ; l'état du système est alors le suivant :

- Bouteille : pression $P_b = p$ connu, température $T_b = T_a$.
- Cylindre : pression P_a , température T_a , position du piston AA'

Le piston fait ensuite un aller-retour ;

6. Tracer ces étapes dans un diagramme $P_{cyl}V_{cyl}$, en distinguant deux étapes lors du retour (avant que la soupape S' ne s'ouvre, et après.)

   Contrairement à la situation précédente, lors du retour, la soupape S' ne s'ouvre pas directement. Il faut attendre que la pression dans cylindre soit au moins égale à P_b. Donc dans un premier temps, la pression suit la loi : $P = \dfrac{n_1 RT}{V_{cyl}}$, jusqu'à ce que la pression atteigne P_b, à ce moment là la soupape S' s'ouvre et la pression suit ensuite la loi : $P = \dfrac{n_2 RT}{V_{cyl} + V_b}$. Avec $n_1 = P_a V_{max}/RT$ et $n_2 = P_b(V_b + V_{ouverture})/RT$

7. Déterminer le volume d'air V' dans le cylindre lorsque la soupape S' s'ouvre, puis, en fonction de p , V_b , P_a , V_{min} et V_{max} , la pression p' dans la bouteille à la fin de cette opération.

   Comme dit dans la réponse précédente, la soupape s'ouvre lorsque $P = P_b$, c'est à dire :

$$\frac{n_1 RT}{V'} = P_b \implies V' = V_{max}\frac{P_a}{p}$$

   On a alors $n_2 = p(V_b + V')/RT$. A la fin de l'opération, la pression dans la bouteille est :

$$p' = \frac{n_2 RT}{V_{min} + V_b} \implies p' = p\frac{V_b + V'}{V_{min} + V_b} = p\frac{V_b + V_{max}\frac{P_a}{p}}{V_{min} + V_b}$$

8. En déduire, en fonction des mêmes grandeurs, la variation Δp de la pression à l'intérieur de la bouteille.

$$\Delta p = p' - p = p\frac{V_{max}\frac{P_a}{p} - V_{min}}{V_b + V_{min}}$$

9. Déterminer la pression maximale p_{max} que l'on peut obtenir par ce procédé et interpréter le résultat obtenu.

   La pression maximale est obtenue lorsque $\Delta p = 0$ c'est à dire lorsque $p = P_a \dfrac{V_{max}}{V_{min}}$

   On remarque que cela correspond à la condition pour que la soupape S' s'ouvre. En effet, puisque $V' \geq V_{min}$ (le volume pour lequel la soupape s'ouvre doit rester plus grand que le volume minimum du cylindre, sinon la soupape ne s'ouvre jamais) on constate que $p \leq P_a \dfrac{V_{max}}{V_{min}}$.

   On peut donc augmenter l'efficacité du compresseur en s'assurant que le volume minimum du cylindre, c'est à dire, en gros, le volume du tuyau qui relie le cylindre au réservoir, est le plus petit possible.