DS Physique 8

EC : Thermo

Durée : 3h. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique.

$$k_b = 1.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}} \qquad R = 8.31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \qquad 0\,\mathrm{K} = -273\,^\circ\mathrm{C}$$

1 Questions de cours

Variation d'entropie d'un liquide.

1. Une masse m de liquide idéal de capacité thermique massique constante c_ℓ passe de la température T_1 à la température T_2. Quelle est la variation d'entropie associée à cette transformation ?

$$\Delta S = mc_\ell \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

2. Une masse m de liquide idéal de capacité thermique massique c_ℓ passe de la température T_1 à la température T_0. À cette température, l'intégralité du liquide passe sous forme solide. L'enthalpie massique de fusion est : $\Delta_{\mathrm{fus}} h$. Quelle est la variation d'entropie totale associée à ces deux transformations successives ?

$$\Delta S = mc_\ell \ln(\frac{T_0}{T_1}) - m\frac{\Delta_{fus} h}{T_0}$$

Entropie d'un gaz parfait

3. Pour n'importe quel système de température T et de pression p qui subit une transformation infinitésimale quelconque, quel est le lien entre dU, dS et dV?

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$$

4. En déduire que pour un gaz parfait :

$$S = s_0 + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)$$

5. On suppose que ce gaz subit une transformation adiabatique réversible. Quelle quantité impliquant T, V et γ est conservée le long de cette transformation ? (Une preuve est demandée).

Bilan d'entropie.

6. Soit un système de masse $m = 1$ kg constitué d'une phase condensée de capacité thermique c_p, inconnue, en équilibre avec deux thermostats, $T_1 = 7\,^\circ$C et $T_2 = 27\,^\circ$C. Lors d'une transformation, ce système échange reçoit une puissance thermique constante $\mathscr{P}_1 = -7\ W$ de la part du thermostat 1 et une puissance thermique constante $\mathscr{P}_2 = 5\ W$ de la part du système 2. On s'intéresse à une transformation qui dure $\Delta t = 10\ s$

   a) Donner l'expression et la valeur numérique du transfert thermique Q_1 et Q_2 reçu de la part du thermostat 1 et du thermostat 2.

$$Q_1 = \mathscr{P}_1 \Delta t = -70\,\mathrm{J}$$
$$Q_2 = \mathscr{P}_2 \Delta t = 50\,\mathrm{J}$$

   b) Donner l'expression de l'entropie d'échange lors de cette transformation.

$$S_e = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{-70}{280} + \frac{50}{300} \approx -0.1\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$$

c) La température au début de la transformation est $T_i = 17\,°\mathrm{C}$. La température à la fin est $T_f = 12\,°\mathrm{C}$. En déduire l'expression de la variation d'entropie en fonction de c_p.

$$\Delta S = mc_p \ln(\frac{T_f}{T_i})$$

d) Utiliser le deuxième principe pour en déduire la valeur numérique minimale de c_p. On donne :

$$\ln(\frac{285}{290}) \approx -\frac{1}{60}$$

$$S_c = \Delta S - S_e > 0$$

Donc :

$$c_p > \frac{S_e}{m\ln(\frac{T_f}{T_i})} = 5\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$$

2 Problème : Procédé SEPT

On étudie la machine thermique industrielle appelée SEPT, qui possède deux modes de fonctionnement. Un mode "Pompe à chaleur" qui sert à stocker de l'énergie sous forme thermique, et un mode générateur d'énergie.

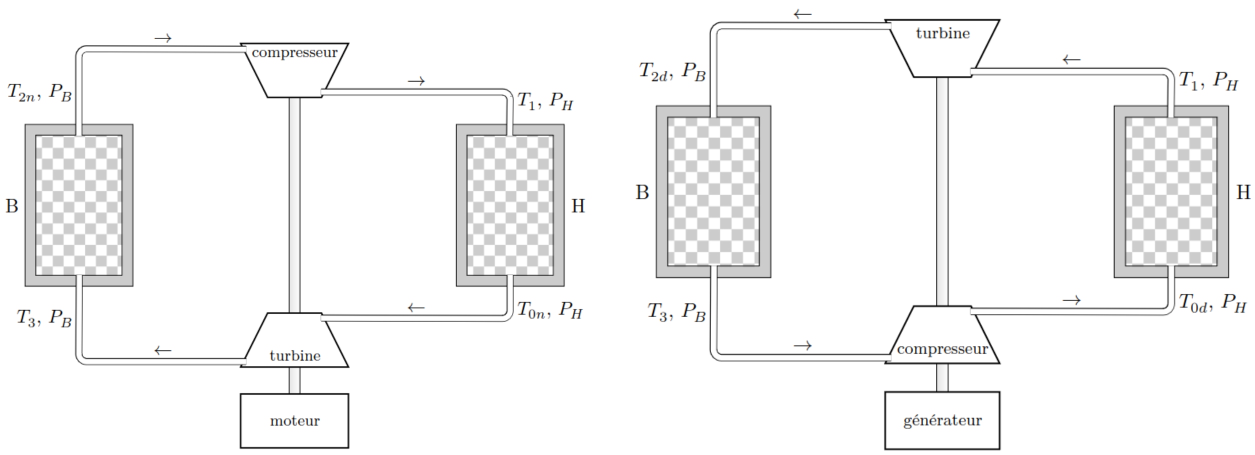


Figure 1 – À gauche en mode pompe à chaleur (stockage), à droite en mode générateur.

Dans ce procédé, un fluide subit des transformations dans une machine ditherme représentée ci-dessus. L'enceinte B et l'enceinte H sont thermostatées et $T_H > T_B$. On passe d'un mode à l'autre en changeant le sens de déplacement du fluide.

En mode pompe à chaleur, le gaz pénètre dans l'enceinte H à la température $T_1 \approx 1200\ K$ et en sort à la température $T_{0n} \approx 300\ K$. Après décompression dans la turbine, il pénètre dans l'enceinte B à la température $T_3 = 200\ K$ et en sort à la température $T_{2n} \approx 800\ K$. Le fluide utilisé est de l'argon, et de masse molaire $M \approx 40\ g/mol$. Ce fluide subit une évolution isobare dans les enceintes B et H, et des adiabatiques dans le compresseur et dans la turbine.

1. Représenter le diagramme général des transferts d'énergie (Q_c, Q_f, W), dans une pompe à chaleur ditherme, en indiquant le sens réel des échanges d'énergie. À quoi correspond la source chaude dans le procédé SEPT ? À quoi correspond la source froide ici ?

2. Définir l'efficacité d'une pompe à chaleur et déterminer sa valeur maximale théorique ici, en fonction de T_B et T_H.

$$e \overset{\text{def}}{=} \frac{-Q_c}{W} = -\frac{Q_H}{W}$$

...

$$e_m = \frac{T_H}{T_H - T_B}$$

3. En supposant que l'argon est un gaz parfait monoatomique. Quelle sont les expressions des grandeurs massique c_v et c_p ? Quelle est la valeur du rapport isentropique γ ? Exprimer c_v et c_p en fonction de M, R et γ.

$$c_v = \frac{1}{M}\frac{3}{2}R = \frac{1}{M}\frac{R}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{1}{M}\frac{5}{2}R = \frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\gamma = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

4. Montrer que, pour un gaz parfait, son entropie peut s'écrire sous la forme :

$$S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + S_0$$

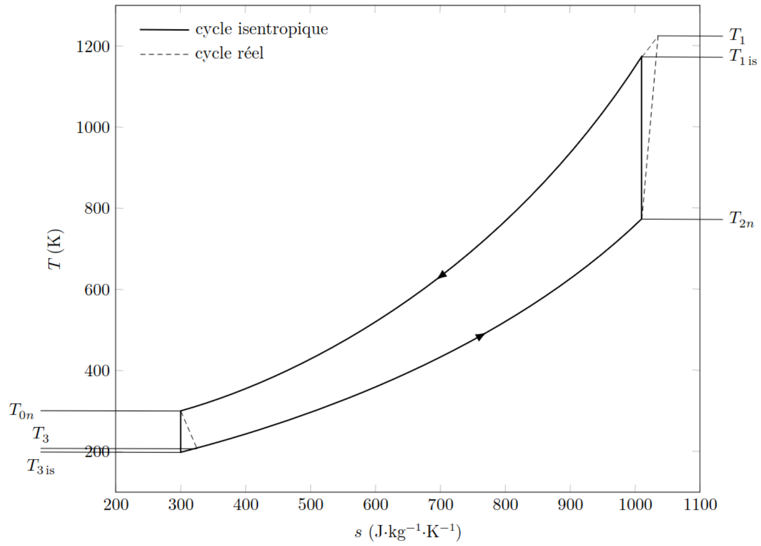
5. Un gaz parfait subit une transformation isobare de T_i jusqu'à T. Donner l'expression de T en fonction de Δs, la variation d'entropie massique lors de cette transformation et de c_p et T_i.

   Lors de cette transformation, P est constant donc $P_f = P_i$ et donc :

$$\Delta S = mc_p \ln(\frac{T}{T_i})$$

$$T = T_i e^{\frac{\Delta s}{c_p}}$$

On a tracé ci-dessous l'allure du cycle suivi par le fluide dans un diagramme $T - s$, où s est l'entropie massique du fluide. La légende prête à confusion et il vaut mieux lire cycle réversible au lieu de cycle isentropique.



6. Commenter l'allure du cycle SEPT en mode pompe à chaleur, en particulier, indiquer sur votre schéma les éléments traversés par le fluide à chaque étape du cycle et justifier l'allure des portions de courbe du cycle.

On considère une masse dm de fluide qui rentre dans le compresseur. Son enthalpie massique est h_{ec}. À sa sortie, son enthalpie massique est h_{sc}. On note ω_c, le travail massique reçu par le fluide dans le compresseur, et q_c le transfert thermique massique reçu dans le compresseur. On admet la loi suivante :

$$h_{sc} - h_{ec} = \omega_c + q_c \qquad (1)$$

7. Que vaut q_c si le passage du fluide dans le compresseur est très rapide ?

   $q_c \approx 0$

On suppose que la loi (1) est valide pour la turbine également (en remplaçant c par t), et que ce passage est rapide également.

On note ω_c le travail massique réellement échangé par le fluide avec les parties mobiles du compresseur et $\omega_{c,is}$ le travail idéal correspondant en supposant la compression isentropique. De même, on note ω_t le travail massique réellement échangé par le fluide avec les parties mobiles de la turbine et $\omega_{t,is}$ ce travail idéal dans les conditions isentropiques. On définit les rendements par rapport à l'isentropique du compresseur η_c et de la turbine (η_c) par

$$\eta_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_{c,is}}{\omega_c} \qquad \eta_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_t}{\omega_{t,is}}$$

On note h_{et} l'enthalpie massique en entrée de la turbine ($h_{et,is}$ dans le cas isentropique), et h_{st} l'enthalpie massique en sortie de la turbine ($h_{st,is}$ dans le cas isentropique).

8. Exprimer η_c en fonction de $h_{sc,is}, h_{ec}, h_{sc}$ et η_t en fonction de $h_{st,is}, h_{et}, h_{st}$.

$$\eta_c = \frac{\omega_{cis}}{\omega_c} = \frac{h_{scis} - h_{ec}}{h_{sc} - h_{ec}}$$

   pareil pour η_t

9. Exprimer $\Delta_c h \stackrel{\text{def}}{=} h_{sc} - h_{ec}$ en fonction de c_p, T_{2n} et T_1.

$$h_{sc} - h_{ec} = c_p(T_1 - T_{2n})$$

10. Lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait, $P^{\alpha}T^{\beta}$ est constant. Quelle est la valeur de α et β? (Justifiez votre réponse).

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma}$$

On pose $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{P_H}{P_B}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$

11. Montrer que T_1 peut être exprimé en fonction du rendement du compresseur et de la température d'entrée du compresseur et de ψ via :

$$T_1 = T_{2n}\left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_c}\right)$$

Lors d'un passage isentropique dans le compresseur :

$$P_B^{1-\gamma}T_{2n}^{\gamma} = P_H^{1-\gamma}T_{1,is}^{\gamma}$$

Donc :

$$T_{1,is} = T_{2n}\left(\frac{P_B}{P_H}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{2n}\left(\frac{P_B}{P_H}\right)^{-(1-\frac{1}{\gamma})} = T_{2n}\left(\frac{P_H}{P_B}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} = T_{2n}\psi$$

et

$$\eta_c(h_{sc} - h_{ec}) = (h_{scis} - h_{ec})$$
$$\Longrightarrow \eta_c c_p(T_1 - T_{2n}) = c_p(T_{1is} - T_{2n})$$

soit :

$$\eta_c T_1 = T_{2n}\left(\psi - 1 + \eta_c\right)$$

Finalement, il reste :

$$T_1 = T_{2n}\left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_c}\right)$$

12. De même, exprimer T_3 en fonction de T_{0n}, ψ et η_t.

C'est le même raisonnement pour la turbine que pour la question précédente.

On part d'un passage isentropique dans la turbine :

$$P_H^{1-\gamma}T_{0n}^{\gamma} = P_B^{1-\gamma}T_{3,is}^{\gamma}$$

Soit :

$$T_{3,is} = T_{0n}\frac{1}{\psi}$$

Puisque, par définition de η_t :

$$\eta_t(h_{st,is} - h_{et}) = (h_{st} - h_{et})$$

On obtient :

$$T_3 = T_{0n}\left(1 + \eta_t(\frac{1}{\psi} - 1)\right)$$

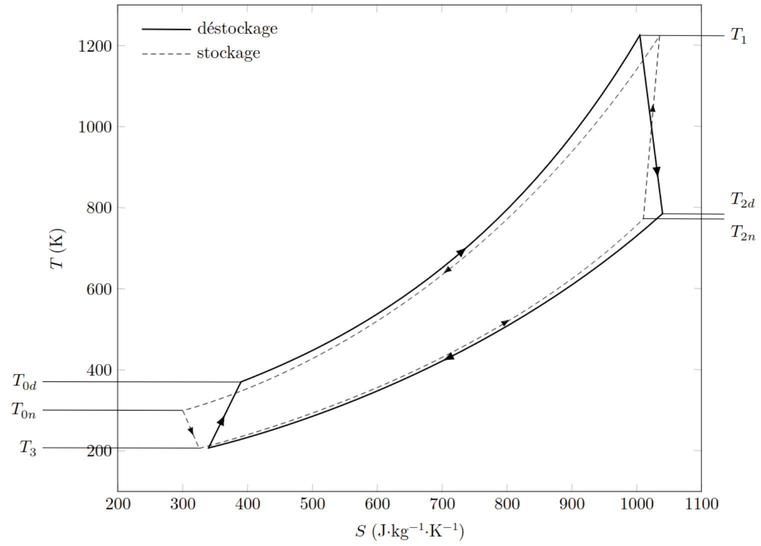
On appelle énergie massique stockée :

$$e_s \stackrel{\text{def}}{=} c_p(T_1 - T_{2n} + T_3 - T_{0n})$$

13. Montrer que :

$$e_s = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}\left(\frac{T_{2n}(\psi - 1)}{\eta_c} + \eta_t T_{0n}(\frac{1}{\psi} - 1)\right)$$

La figure ci-dessous présente les deux cycles de stockage (mode pompe à chaleur) et de déstockage (mode moteur). En déstockage, le gaz circule dans le sens opposé de celui du stockage, ce qui était une compression de T_{2n} à T_1 lors du stockage devient une détente de T_1 à T_{2d}.



On admet que ψ le rapport de pression isentropique doit être différent lors du stockage et lors du destockage. On le note ψ lors du stockage, et ψ' lors du destockage.

On note η_c' le rendement du compresseur lors du destockage et η_t' le rendement de la turbine pendant le destockage.

14. Montrer que :

$$T_{0d} = T_{0n}\left(1+\frac{\psi'-1}{\eta_c'}\right)\left(1+\frac{\eta_t(1-\psi)}{\psi}\right)$$
$$T_{2d} = T_{2n}\left(1+\frac{1-\psi}{\eta_c\psi}\right)\left(1+\frac{\eta_t'(1-\psi')}{\psi'}\right)$$

C'est à nouveau le même raisonnement que pour les questions précédentes. On suppose un passage isentropique dans le compresseur (qui était la turbine précédemment) :

$$P_B^{1-\gamma}T_3^\gamma = P_H^{1-\gamma}T_{0d,is}^\gamma$$

On en déduit :

$$T_{0d} = T_3\psi'$$

On applique la définition du rendement η_c' et le premier principe pour obtenir :

$$T_{0d} = T_3\left(\frac{\psi'-1}{\eta_c'}+1\right)$$

Enfin, on remplace T_3 par son expression obtenue à la question précédente :

$$T_{0d} = T_{0n}\left(1+\frac{\psi'-1}{\eta_c'}\right)\left(1+\frac{\eta_t(1-\psi)}{\psi}\right)$$

C'est la même chose pour T_{2d}

15. En remarquant que $T_{2d} \approx T_{2n}$, exprimer ψ' en fonction de η_c, η_t' et ψ.

Pour que $T_{2d} = T_{2n}$, il faut que :

$$\left(1+\frac{1-\psi}{\eta_c\psi}\right)\left(1+\frac{\eta_t'(1-\psi')}{\psi'}\right) = 1$$

Soit après calculs barbares :

$$\psi' = \frac{1+\dfrac{1-\psi}{\psi}\dfrac{\eta_t'}{\eta_c}}{1+\dfrac{1-\psi}{\psi}\dfrac{1-\eta_t'}{\eta_c}}$$

ou encore :

$$\psi' = \frac{\eta_t'(\eta_c+\psi-1)}{(1-\psi+\eta_t'(\eta_c+\psi-1))}$$

On appelle énergie massique déstockée :

$$e_d \overset{\text{def}}{=} c_p(T_1 - T_{2d} + T_3 - T_{0d})$$

16. Évaluer la différence entre l'énergie déstockée et l'énergie stockée $\Delta e \stackrel{\text{def}}{=} e_d - e_s$.

On peut explicitement remplacer :

$$e_d = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}\left(T_{0n}\left(1+\eta_t\left(\frac{1}{\psi}-1\right)\frac{\psi-1}{\eta_c'\left((1-\psi)+\eta_t'(\eta_c+\psi-1)\right)}+T_1\frac{\psi-1}{\eta_c}\right)\right)$$

mais honnêtement, on attend sans doute plus ici qu'on dise que c'est tout simplement :

$$\Delta e = c_p(T_{2n} - T_{2d} + T_{0n} - T_{0d})$$

et si on tient compte de $T_{2d} \approx T_{2n}$

$$\Delta e = c_p(T_{0n} - T_{0d})$$

17. On appelle inefficacité la grandeur $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\Delta e|}{e_s}$. Donner l'expression de δ en fonction de $T_{0n}, T_{2n}, \psi, \psi'$, $\eta_c, \eta_c', \eta_t, \eta_t'$

Là c'est beaucoup plus simple : on remplace e_s et e_d par les définitions avec les températures (rappel : $T_{2d} = T_{2n}$), et on remarque qu'il ne reste que :

$$\frac{\Delta e}{e_s} = c_p\frac{T_{0n} - T_{0d}}{e_s}$$

18. Quelles valeurs de ψ, ψ', η_c, etc. permettent de minimiser l'inefficacité ? Commenter.

Il faut que T_{0d} soit le plus proche possible de T_{0n}, donc que : autrement dit, il faut que compression et détente soient réversibles. ce qui mène à :

$$\eta_c = 1 \text{ et } \eta_t = 1$$

et aussi

$$\psi' = \psi$$

19. (Bonus) Montrer que ψ' est nécessairement différent de ψ.

On suppose que $\psi' = \psi$, on remplace dans l'expression de T_{0d} en fonction de T_{0n} (ou bien T_{2d} en fonction de de T_{2n}), on montre que ça implique que $\eta_t' > 1$, ce qui est impossible, puisque η_t' est un rendement.