DS PHYSIQUE 9

EC : Chimie

Durée : 3h. **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.** Encadrez les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique.

1 Questions de cours

On considère la transformation chimique suivante :

$$\mathrm{CO_2(g) + H_2O\,(g) \longrightarrow C_6H_{12}O_6(l) + O_2(g)}$$

1. Équilibrer cette réaction, en prenant 1 pour le coefficient stœchiométrique de $\mathrm{C_6H_{12}O_6(l)}$ (l'éthanol).

Cette réaction a pour constante de réaction la valeur K connue.

On réalise cette transformation dans un réacteur fermé, de pression totale fixée à $P = P^0$, et au contact d'un thermostat à la température T_0 connue. On part d'une situation initiale où il y a n moles de chaque espèce chimique ($n_0(\mathrm{CO_2}) = n_0(\mathrm{H_2O}) = n_0(\mathrm{C_6H_{12}O_6}) = n_0(\mathrm{O_2}) = n$).

2. Donner le domaine de valeur que peut prendre l'avancement ξ.

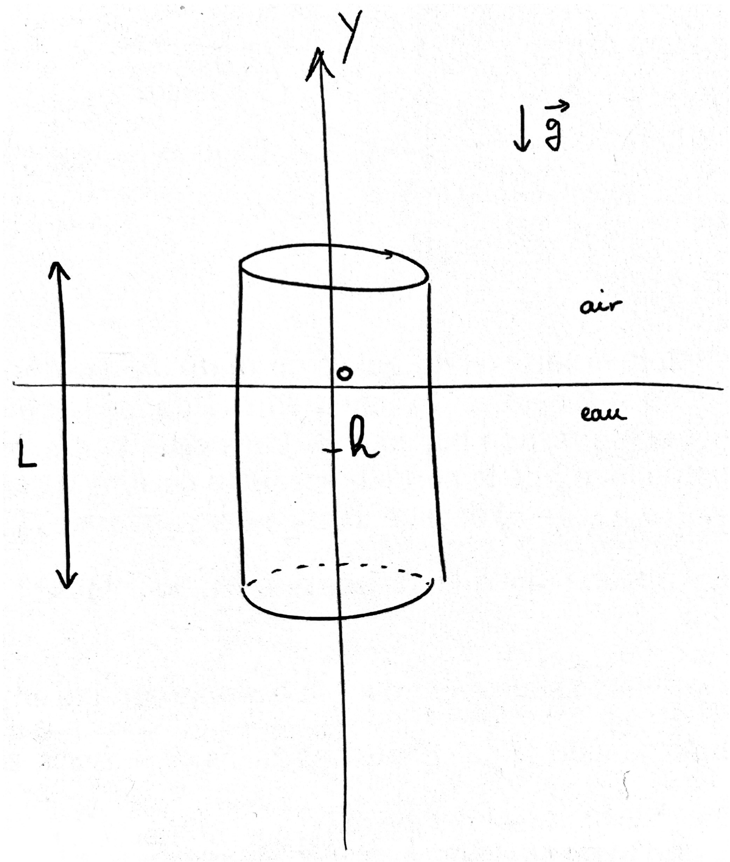
3. Quelle est l'expression du quotient de réaction Q à l'état initial ?

4. Quelle équation doit vérifier ξ_e, l'avancement à l'équilibre ?

2 Problème I

Rappel utile : $R = 8{,}3\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $\mu_e \approx 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

On cherche à modéliser les oscillations d'un bouchon de pêcheur après une perturbation. On modélise le bouchon par un cylindre de liège de masse volumique $\mu_\ell = 200\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$. On suppose pour le moment que le bouchon reste vertical, et qu'il peut uniquement se mouvoir dans la direction verticale, nommée $\vec{u}_y$. Le bouchon est de rayon $R_0 = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ et de longueur $L = 3\,\mathrm{cm}$. On note h l'altitude du *centre* du bouchon. On remarque que h peut prendre des valeurs numériques négatives, lorsque le centre du bouchon est sous le niveau d'eau, ce qui est le cas sur le schéma. On suppose qu'en $y = 0$ la pression (tant dans l'eau que dans l'air) vaut $P_0 = 10^5$ Pa. On suppose également le champ de gravité $\vec{g}$ uniforme.



1. **1.** Donner l'altitude y de chaque face, en fonction de L et h. Vérifiez la cohérence de votre résultat lorsque le bouchon est tout juste hors de l'eau (face du bas en $y = 0$) et lorsqu'il est tout juste immergé (face du haut en $y = 0$).
2. **2.** Établir l'expression du champ de pression $P_e(y)$ dans l'eau, en supposant l'eau comme un liquide de masse volumique μ_e constante.
3. **3.** En déduire, en fonction de h, la résultante des forces de pression $\vec{F}_{e \to b}$ exercée par l'eau sur le bouchon.

Pour les forces de pression exercées par l'air, contrairement à ce qu'on fait usuellement, on ne va pas supposer que la pression est uniforme dans l'air.

On suppose que l'air est un gaz parfait de température T_0 *uniforme*, de pression P_a *non uniforme* et de masse molaire $M_a = 29\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$.

4. **4.** Montrer que la pression dans l'air est :

$$P_a(y) = P_0\, e^{-\dfrac{M_a g y}{R T_0}} .$$

5. **5.** Vérifier que, en tout point de contact entre l'air et le bouchon, $M_a g y \ll R T_0$. En déduire une expression approchée de P_a via un développement limité à l'ordre 1.
6. **6.** En déduire la résultante des forces de pression exercées par l'air sur le bouchon $\vec{F}_{a \to b}$. Donner votre résultat en fonction de h et de la masse volumique μ_a de l'air en $z = 0$.
7. **7.** En déduire la résultante totale de toutes les forces extérieures de pression. Retrouver ce résultat en utilisant la poussée d'Archimède.

On repère le bouchon par la position de son centre h. On note son accélération $\vec{a} = \ddot{h}\,\vec{u}_y$.

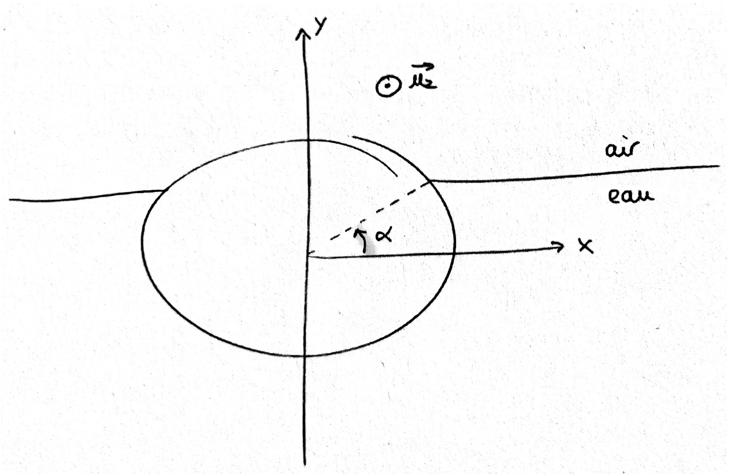
8. Établir une équation différentielle temporelle sur h et en déduire la fréquence des oscillations du bouchon après une perturbation. Vous poserez

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\mu_e - \mu_a}{\mu_\ell} \qquad \text{et} \qquad \mu_m = \frac{\mu_e + \mu_a}{2}$$

pour simplifier vos expressions.

9. Quelle est l'expression de la position d'équilibre h_1 ? Faire l'application numérique.

Jusqu'à présent, on a supposé que le bouchon restait vertical. On va maintenant prendre en compte le fait que le bouchon peut pivoter autour de son centre de masse. Il ne vous aura pas échappé qu'un tel bouchon est probablement plus stable à la surface de l'eau lorsqu'il est horizontal.



On note α l'angle entre l'horizontale et le segment qui va du centre du bouchon vers l'interface air–eau (voir schéma). On repère les points appartenant au bouchon en *coordonnées cylindriques*, en prenant soin de remarquer que $\vec{u}_x$ correspond à une direction horizontale. Dans cette partie, on place l'origine au centre du bouchon, ce qui fait que la coordonnée y de la partie précédente devient maintenant $y - h$. On admet que la pression dans l'eau est $P_e(y) = P_0 - \mu_e g(y - h)$ et celle dans l'air est uniforme P_0.

10. Soit un point $M = (R_0, \theta, z)$ appartenant à l'interface entre le bouchon et l'eau. Exprimer l'altitude y en fonction de R_0 et θ.

11. Donner l'expression du vecteur $\mathrm{d}\vec{S}$ situé en M, dans la base cylindrique en M.

12. En déduire, sans utiliser Archimède, la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le bouchon.

Pour terminer ce problème, on chercherait h_2 la position d'équilibre dans cette configuration, et on chercherait qui de h_1 ou h_2 mène à une énergie potentielle la plus basse pour trouver la configuration stable.

3 Problème II

On rappelle l'expression de l'équation de Schrödinger en 1D :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi.$$

On souhaite déterminer les fonctions d'ondes solution d'une particule plongée dans un potentiel associé à une force de rappel élastique. On considère une particule de masse m connue qui peut se mouvoir uniquement dans la direction $\vec{u}_x$.

1. Rappeler la forme que prend l'énergie potentielle associée à une force de rappel élastique de raideur k connue, lorsque la position d'équilibre est $x_0 = 0$. Mettre cette énergie potentielle sous la forme :

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

en précisant l'expression de ω_0.

On admet que les fonctions d'ondes solutions sont de la forme :

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

avec E une constante inconnue pour le moment.

2. Établir une équation différentielle sur ϕ. Dire pourquoi cette équation est difficile à résoudre.

3. On propose comme solution une fonction $\phi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$, avec A une constante réelle. Vérifier que cette fonction est solution pour une valeur spécifique de E, notée E_0 que vous préciserez. On notera $\psi_0(x,t)$ la solution associée.

4. On donne l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

Déterminer l'expression de A.

On admet qu'une autre solution est :

$$\psi_1(x,t) = \phi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar}$$

avec $\phi_1 = Bx\,e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$, $E_1 = \hbar\omega_0\frac{3}{2}$ et

$$B = \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4}.$$

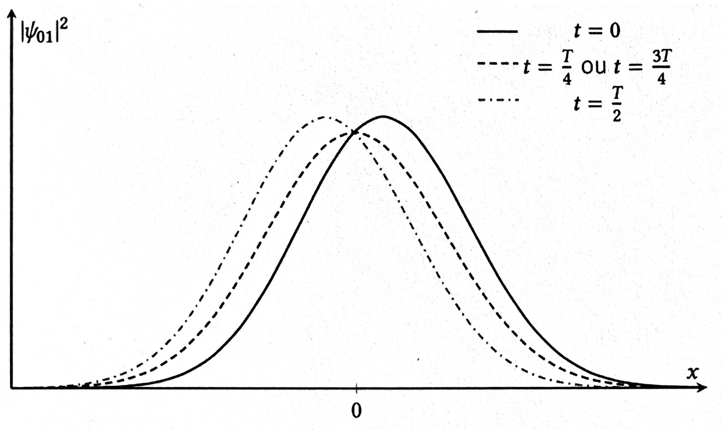
On s'intéresse à la combinaison linéaire :

$$\psi_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0 + \psi_1\right).$$

5. Montrer que la densité de probabilité de présence est de la forme (préciser ω_{01}) :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = e^{-\frac{m\omega_0}{\hbar}x^2}\frac{1}{2}\left(A^2 + (Bx)^2 + 2ABx\cos(\omega_{01}t)\right).$$

On a tracé ci-dessous $|\psi_{01}|^2$ à différents instants.



6. Pourquoi dit-on que cette combinaison linéaire ψ_{01} correspond à la situation classique d'oscillation d'une particule autour de sa position d'équilibre ? Préciser la période T de ces oscillations.