DS1.

Ex 1.

1) a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}.$$
$$= S_n - nu_{n+1}.$$

b) On note S la somme de $\sum u_n$. (S_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq S$.

(u_n) est une suite positive donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = S_n - nu_{n+1} \leq S_n \leq S$

(T_n) est une suite croissante (car $T_{n+1} - T_n = (n+1)(u_{n+1} - u_{n+2}) \geq 0$)

et majorée donc convergente.

c) On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ et T la somme de $\sum v_n$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k - u_{k+1} = \dfrac{v_k}{k}$

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$, $\underbrace{\sum_{k=N}^{n} u_k - u_{k+1}}_{u_N - u_{n+1}} = \sum_{k=N}^{n} \dfrac{v_k}{k}$

Or, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $u_N = \sum_{k=N}^{+\infty} \dfrac{v_k}{k}$.

donc $Nu_N \leq \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$

(u_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq nu_{n+1} \leq nu_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$

Or $\sum v_k$ converge donc sa suite de restes converge vers 0

Par encadrement, $nu_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\lim S_n$ existe et $\lim T_n = \lim S_n$

2) $\sum x_n$ est une série à termes positifs donc (R_n) est une suite positive décroissante $\left(R_{n+1} - R_n = \sum_{k=n+2}^{+\infty} x_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k = -x_{n+1} \leq 0 \right)$ qui converge vers 0 $(R_n = S - S_n)$

Par la question 1, $\sum R_n$ et $\sum n(R_n - R_{n+1}) = \sum n x_n$ ont la même nature et la même somme.

Ex 2.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue et positive sur $[0, +\infty[$

et $f_n(t) = \frac{t^2}{(1+t^4)^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^{4n}} = \frac{1}{t^{4n-2}}$ avec $4n-2 > 1$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\,dt = \left[\frac{t^3}{3} \times \frac{1}{(1+t^4)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{3} \times \frac{4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt$

Intégration par parties $u(t) = \frac{1}{(1+t^4)^n}$ $u'(t) = \frac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}$

$v(t) = \frac{t^3}{3}$ $v'(t) = t^2$

Donc $I_n = 0 + \frac{4n}{3} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2(1+t^4)}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt \right)$

car $\frac{t^3}{3} \times \frac{1}{(1+t^4)^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^3}{3t^{4n}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi $I_n = \frac{4n}{3} I_n - \frac{4n}{3} I_{n+1}$.

3) $\frac{4n-3}{4n} < 1$ donc (I_n) est décroissante

f_n est positive donc I_n est positive

Ainsi (I_n) est convergente.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $I_n = 0$, on aurait (thm du cours) $f_n = 0$.

Ce qui est faux (par ex $f_n(1) = \frac{1}{2^n}$). Par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n \geq 0$

Donc (J_n) est une suite strictement positive.

b) $$\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n) = \ln((n+1)^{3/4} I_{n+1}) - \ln(n^{3/4} I_n)$$
$$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/4} \frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$$
$$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/4} \frac{4n-3}{4n}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{3}{4n}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{3}{4n} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4n}\right)^2$$
$$= \frac{-21}{32n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-21}{32n^2}$

c) Par thm de comparaison ($\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n)$ est de signe constant, negatif, au voisinage de $+\infty$), $\sum \ln(J_{n+1}) - \ln(J_n)$ converge.

5) Par telescopage, $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(J_{k+1}) - \ln(J_k)}_{S_n} = \ln(J_{n+1}) - \ln(J_1)$$

Par la question precedente, (S_n) converge donc $(\ln(J_n))$ converge, on note ℓ sa limite

Par definition $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ln(n^{\frac{3}{4}} I_n)$

donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{4}} I_n = e^{\ell}$

Ainsi $I_n \sim \frac{e^{\ell}}{n^{3/4}}$ on note $c = e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$.

6) on note $g_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

- Si $x \geq 1$: g_x est continue et positive sur $[0, +\infty[$

$$\text{et } g_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{car } e^{-t} t^{x+1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées}$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt$ converge.

- Si $x \in]0, 1]$: g_x est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

De même, $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ converge

Et $g_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$.

Par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^1 g_x(t)\,dt$ converge.

Par relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt$ converge.

7) $v(t) = \ln(1+t^4)$ donc $v'(t) = \frac{4t^3}{1+t^4} > 0$ v est strictement croissante

$t = (e^{v(t)} - 1)^{1/4} = \frac{1}{\phi(v)}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{4t^3}{1+t^4} = \frac{4t^3}{e^v}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\,dt$$

$$= \int_{v(0)}^{\lim_{t\to+\infty} v(t)} \frac{\phi(v)}{4e^{nv}} e^v\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-(n-1)v}\,\phi(v)\,dv.$$

8) $\psi(v) = \phi(v) - v^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(e^v-1)^{1/4}} - \frac{1}{v^{1/4}}$ donc $\psi(v) \xrightarrow[v\to+\infty]{} 0$

$$\text{Et } \psi(v) = \frac{1}{v^{1/4}} \times \left(\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^{-1/4} - 1\right) = \frac{1}{v^{1/4}}\left(\left(1 + \frac{v}{2} \underset{v\to 0}{+} o(v)\right)^{-1/4} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{v^{1/4}}\left(1 - \frac{1}{4}\times\frac{v}{2} \underset{v\to 0}{+} o(v) - 1\right)$$

$$\underset{v\to 0}{\sim} -\frac{1}{8} v^{3/4} \quad \text{donc } \psi(v) \xrightarrow[v\to 0]{} 0.$$

Par limites, il existe $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in]0, A[, \ |\psi(v)| \leq 1$

$\forall x \in]B, +\infty[, \ |\psi(v)| \leq 1$

Et ψ est continue sur $[A, B]$ donc bornée sur $[A, B]$.

DS 1

Suite.

Par la question précédente, $I_{n+1} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-nv}\phi(v)\,dv$

$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-nv}\psi(v)\,dv + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nv}}{v^{1/4}}\,dv.$

On note $M = \sup|\psi|$ alors $\left|\int_0^{+\infty} e^{-nv}\psi(v)\,dv\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-nv} M\,dv$

$\leq \frac{M}{n}.$

9) $I_{n+1} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nv}}{v^{1/4}}\,dv + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{4n^{3/4}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{4}}\,du + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ Chgt variable $u = nv$

$= \frac{1}{4n^{3/4}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc $I_n \sim \frac{1}{4n^{3/4}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

On a donc $c = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.