DS 11

Ex 1.

On note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$ (R son rayon de convergence)

alors $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$

Donc $xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$

$= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1) n a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - 4a_{n-1} \right] x^n$

y solution de $(*)$ $\underset{\text{Unicité du développement en série entière}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} (n+1)^2 = 4a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On suppose (a_n) solution et aussi $a_0 = y(0) = 1$.

On note $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{(n!)^2}$

- $a_1 = 0$ et $a_0 = 1 = \frac{1}{(0!)^2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \frac{4}{(2n+3)^2} a_{2n+1} = 0$

et $a_{2(n+1)} = \frac{4}{(2n+2)^2} a_{2n} = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{((n+1)!)^2}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et $\frac{x^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc par le critère de d'Alembert $R = +\infty$.

Il existe une unique solution de $(*)$ développable en série entière et valant 1 en 0 : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) a) On note $I = [0, 2\pi]$, $A = \mathbb{R}$ $\quad f : A \times I \to \mathbb{R}$
$$(x,t) \mapsto e^{2x\cos(t)}$$

- $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A.
- $\forall x \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $\partial_1^k f(x,t) = (2\cos(t))^k e^{2x\cos(t)}$

  $t \mapsto \partial_1^k f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur I.

- Soit $[a,b] \subset A$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in I$,

  $|\partial_1^k f(x,t)| \leq 2^k e^{2b}$ et $t \mapsto 2^k e^{2b}$ est intégrable sur I

Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A

et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos(t))^k e^{2x\cos(t)} dt$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x F''(x) + F'(x) - 4x F(x) = \frac{1}{2\pi}\left(x\int_0^{2\pi} 4\cos(t)^2 e^{2x\cos(t)} dt + \int_0^{2\pi} 2\cos(t) e^{2x\cos(t)} dt \right.$$
$$\left. - 4x\int_0^{2\pi} e^{2x\cos(t)} dt \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} (4x\cos(t)^2 + 2\cos(t) - 4x) e^{2x\cos(t)} dt \right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \cos(t) e^{2x\cos(t)} dt - \int_0^{2\pi} -2x\sin^2(t) e^{2x\cos(t)} dt \right)$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\left[\sin(t) e^{2x\cos(t)} \right]_0^{\pi}$$
$$= 0$$

(*) on note $v(t) = \sin(t)$ et $u(t) = e^{2x\cos(t)}$ et intégration par parties

donc $v'(t) = \cos(t)$ $\quad u'(t) = -2x\sin(t) e^{2x\cos(t)}$

3) a) Par développement en série entière de exponentielle,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x\cos(t))^n}{n!} dt$$

On note $f_n(t) = \frac{(2x\cos(t))^n}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0, 2\pi]$ et $x \in \mathbb{R}$

Alors $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\quad |f_n(t)| \leq \frac{2|x|^n}{n!}$

Ainsi $\|f_n\|_\infty \leq \frac{2|x|^n}{n!}$ $\quad$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{2|x|^n}{n!}$ converge (série exponentielle)

$\sum f_n$ converge normalement donc absolument sur $[0, 2\pi]$ donc par théorème d'interversion, $F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(2x\cos(t))^n}{n!} dt$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \times \frac{2^n x^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos(t)^n dt.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{v(t)} \underbrace{\cos(t)}_{u'(t)} dt$

$$= \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (n+1)(-\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (n+1)\sin^2(t)\cos^n(t)dt$$

$$= (n+1)\int_0^{2\pi} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)dt$$

$$= (n+1)\left(J_n - J_{n+2}\right)$$

Donc $J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} J_n$.

On note $\mathcal{P}(n)$: $J_{2n} = \frac{(2n)!\, 2\pi}{2^{2n}(n!)^2}$ et $J_{2n+1} = 0$.

- $J_0 = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi = \frac{(2\times 0)!\, 2\pi}{2^{2\times 0}(0!)^2}$

  Et $J_1 = \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = \left[\sin(t)\right]_0^{2\pi} = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$J_{2(n+1)} = J_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} J_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2\pi$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2\, 2^{2n}(n!)^2} \times 2\pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times 2\pi$$

Et $J_{2(n+1)+1} = J_{2n+3} = J_{2n+1+2} = \frac{2n+2}{2n+3} J_{2n+1} = 0$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{2\pi (2n)!} \times \frac{(2n)!\, 2\pi}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n}$$

$= y(x)$ de la question 1.

Ex 2.

1)a) $a \in U$ et U ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$

Si $h \neq 0$, si $|t| < \frac{r}{\|h\|}$ alors $a + th \in B(a, r) \subset U$

car $\|a + th - a\| = \|th\| = |t| . \|h\| < r$.

Si $h = 0$, $a + th \in U$

On note $\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a + th)$ qui est donc définie sur $\left]\frac{-r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right[$ si $h \neq 0$ ou sur $\mathbb{R}$ si $h = 0$.

$t \mapsto a + th$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\varphi_{a,h}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Développement de Taylor-Young : $\varphi_{a,h}(t) = \varphi_{a,h}(0) + \varphi_{a,h}'(0) + \frac{t^2}{2} \varphi_{a,h}''(0) + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$

Or, a est un point de maximum local pour f donc 0 est un point de maximum local pour $\varphi_{a,h}$, ainsi $\varphi_{a,h}'(0) = 0$

et il existe $R > 0$ tel que $\forall t \in B(0, R)$, $\varphi_{a,h}(t) - \varphi_{a,h}(0) \leq 0$

Mais par le développement, $\varphi_{a,h}(t) - \varphi_{a,h}(0) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \varphi_{a,h}''(0)$

Donc au voisinage de 0, $\varphi_{a,h}''(0) \frac{t^2}{2}$ est du même signe que $\varphi_{a,h}(t) - \varphi_{a,h}(0)$

Finalement, $\varphi_{a,h}''(0) \leq 0$.

b) $\varphi_{a,h} : t \longmapsto f\begin{pmatrix} a_1 + th_1 \\ \vdots \\ a_n + th_n \end{pmatrix}$ en notant $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

On note $x_i : t \mapsto a_i + th_1$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ et f aussi.

Par la règle de la chaîne, $\varphi_{a,h}'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a + th)$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, on note $g_i : t \mapsto \partial_i f(a + th) = \partial_i f\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$.

DS11 Suite

$\partial_i f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc par la règle de la chaîne.

$$g_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k \, \partial_k(\partial_i f)(a+th)$$

On a donc $\varphi_{a,h}''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{k=1}^{n} h_k \, \partial^2_{k,i} f(a+th)$

En particulier $\varphi_{a,h}''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_i \, \partial^2_{k,i} f(a) \, h_k$

$$= h^T H_f(a) h.$$

c) On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors $(H_f(a) e_i | e_i) = e_i^T H_f(a) e_i = (H_f(a))_{ii} \leq 0$.

Et $\Delta f(a) = \sum_{i=1}^{n} (H_f(a))_{ii} \leq 0$.

2) a) f est continue sur $\bar{U}$, la norme est continue sur $\bar{U}$ donc par opérations, f_p est continue sur $\bar{U}$ et $\bar{U}$ est un fermé borné en dimension finie donc par le théorème des bornes atteintes, f_p admet un maximum.

Si f_p admettait son maximum en un point $a_p \in U$, par la question 1,

$\Delta f_p(a_p) \leq 0$. Or, on note $g : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

donc $\partial^2_{ii} g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2$

Donc $\Delta f_p(x) = \Delta f(x) + \frac{1}{p} \Delta g(x)$ par opération sur les dérivées partielles secondes.

$$= \Delta f(x) + \frac{2n}{p}.$$

Et $\Delta f_p(a_p) = \frac{2n}{p} > 0$, contradiction.

b) $Fr(U)$ et $\bar{U}$ sont fermés et bornés, f continue sur $\bar{U}$ et $Fr(U)$ donc par le théorème des bornes atteintes $f|_{Fr(U)}$ et $f|_{\bar{U}}$ admettent des maximums.

Et $Fr(U) \subset \bar{U}$ donc $\max_{Fr(U)} f \leq \max_{\bar{U}} f$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_{\varphi(p)}(a_{\varphi(p)}) \geq f_{\varphi(p)}(x) \quad \forall x \in \bar{U}$ par définition

$$f(a_{\varphi(p)}) + \frac{1}{\varphi(p)} \|a_{\varphi(p)}\| \geq f(x) + \frac{1}{\varphi(p)} \|x\|^2$$

Or f est continue sur $\bar{U}$ donc $f(a_{\varphi(p)}) \xrightarrow[p \to +\infty]{} f(x)$

Et $\varphi(p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Ainsi $f(a) \geq f(x)$ et $\max\limits_{Fr(A)} f \geq f(a)$

Donc $\max\limits_{\bar{U}} f \leq \max\limits_{Fr(U)} f$.