DS2

Ex 1.

1)a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu x' = 0$ (1)

alors $u(\lambda x + \mu x') = u(0) = 0$ (2)

$$u(\lambda x + \mu x') = u(\lambda x) + u(\mu x') = \lambda a x + \mu b x'$$

On a donc $a(1) - (2)$ $a\mu x' - \mu b x' = 0$

$$a\mu x' - \mu b x' = \mu x'(a-b)$$

Or, $a - b \neq 0$ et $x' \neq 0$ donc $\underline{\mu = 0}$

Et $x \neq 0$ donc par (1) $\underline{\lambda = 0}$

1) b) Par l'absurde, supposons que u n'est pas une homothétie,

il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ et $x, x' \in E$ tels que $u(x) = ax$, $u(x') = bx'$

Par hypothèse, $u(x + x') = c(x + x')$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$

$$u(x+x') = u(x) + u(x') = ax + bx' = cx + cx'$$

Or, (x, x') est libre donc $a = c = b$. Contradiction avec notre hypothèse de départ.

2) Comme $x \in \mathbb{K}.x$ alors $p(x) = x$,

on a donc $u(x) = u \circ p(x)$

$= p \circ u(x)$ car u commute avec tout endomorphisme de E

$\in \mathbb{K}.x$ par définition de p

3)a). Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

- Si u est une homothétie, comme $Tr(u) = Tr(M) = 0$

alors $u = 0$ donc $M = 0$. On pose $A = B = C = 0$.

- Si u n'est pas une homothétie, il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ soit libre

(Réciproque question 1b)

Par le théorème de la base incomplète, on complète cette famille en $\mathcal{B}$ une base de E. $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 1 & \\ 0 & C \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ on pose $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, $M = (m)$ et $Tr(M) = 0$ donc $m = 0$ $M = 0$ est semblable à une matrice de diagonale nulle.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $Tr(M) = 0$

Par la question précédente, $M = P \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$

$Tr(C) = Tr(M)$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Par hypothèse de récurrence, il existe D de diagonale nulle et $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $D = RCR^{-1}$

Alors, en notant $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ on a $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$

et $S \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ ** & RCR^{-1} \end{pmatrix}$

Ainsi $M = PS^{-1} \begin{pmatrix} 0 & * \\ ** & D \end{pmatrix} SP^{-1}$ et $(PS^{-1})^{-1} = SP^{-1}$

Donc on a montré que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & * \\ ** & D \end{pmatrix}$ qui est de diagonale nulle.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 2.

Par récurrence sur n. On note $E_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})$

- $\underline{n=2}$ Soit $x \in E_1 \cap E_2$ alors $f(x) = \lambda_1 x$
$= \lambda_2 x$

donc $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0$ mais $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $x = 0$

On a démontré que $E_1 \cap E_2 \subset \{0\}$.

E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels donc $\{0\} \subset E_1 \cap E_2$.

- $\underline{\text{Hérédité}}$: Soit $n \geq 2$ tel que la propriété soit vraie au rang n

Soient $(x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \in E_1 \times \dots \times E_{n+1}$

tels que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} y_i$ alors $\sum_{i=1}^{n+1} x_i - y_i = 0$ (1)

$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i - y_i\right) = f(0) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (x_i - y_i) = 0$ (2)

$\lambda_{n+1}(1) - (2)$ $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i)(x_i - y_i) = 0$

or $E_1 + \dots + E_n$ est directe donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $(\lambda_{n+1} - \lambda_i)(x_i - y_i) = 0$

(Unicité de la décomposition en somme de 0)

Or $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$ donc on a $x_i = y_i$.

Puis avec (1), $x_{n+1} = y_{n+1}$ aussi

On a montré que $E_1 + \dots + E_{n+1}$ est directe.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

DS2

Ex 3

1) $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}}_{X_n}$

2) $Ae_1 - e_1 = 0 \iff e_1 \in \ker(A - I_3)$

Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 5 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$

Donc $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par exemple, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) a) Soient M et N semblables, c'est à dire il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$
$M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

telle que $M = PNP^{-1}$

Alors $Tr(M) = Tr(PNP^{-1}) = Tr(P^{-1}PN) = Tr(N)$

car pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $Tr(AB) = Tr(BA)$ voir cours.

3) b) Le determinant car $\det(PNP^{-1}) = \det(P)\det(N)\det(P^{-1})$

$= \det(P)\det(N)\dfrac{1}{\det(P)}$

$= \det(N)$.

c) Si A et D sont semblables alors $Tr(A) = Tr(D)$

$\iff 6 = 1 + a + b$

et $\det(A) = \det(D) \iff (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = ab$.

a et b sont racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$ donc $\{a, b\} \in \{2, 3\}$.

d) D diagonale donc par récurrence $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$

- Pour $n=0$, $D^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^0 & 0 \\ 0 & 0 & b^0 \end{pmatrix}$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$

alors $D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$

La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) ~~Par hypothèse, il existe~~ ~~$P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que~~

4) On cherche e_2 tel que $Ae_2 = 2e_2$. On trouve par exemple, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

De même, pour $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ on a $Ae_3 = 3e_3$.

$\underbrace{(e_1, e_2, e_3)}_{= B'}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\operatorname{card}(B') = \dim(\mathbb{R}^3)$

et B' est libre : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Si on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est à dire

$A = \operatorname{Mat}_B(f)$ avec B la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Alors $D = \operatorname{Mat}_{B'}(f)$

A et D représentent le même endomorphisme donc elles sont semblables.

Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ donc A semblable à D^n.

5) Par la relation de la question 1 et récurrence, $X_n = A^n X_0$

Par produit matriciel, u_n, le 1er coefficient de X_n est combinaison linéaire des coefficient de D^n qui sont $1, 2^n$ et 3^n.