

Ex 1

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $|u_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $n^{3/2} |u_n(x)| = n^{3/2} \frac{|x|}{x^2 + n^2 \pi^2}$

Si $x \neq 0$, $u_n(0) = 0$, la série converge

$$\sim \frac{n^{3/2} |x|}{n^2 \pi^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par comparaison à une série de Riemann,

$\sum u_n(x)$ converge absolument donc converge.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a, a], |u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2 \pi^2} \leq \frac{2a}{n^2 \pi^2}$

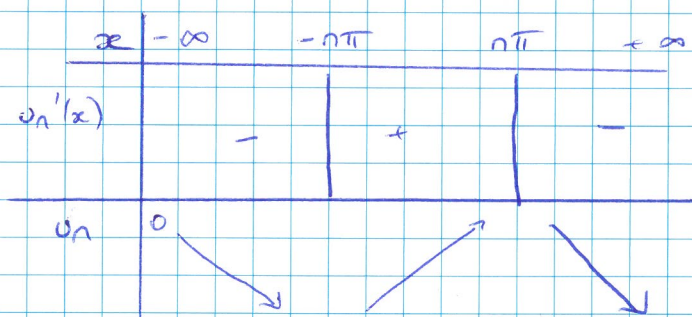
Donc $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{2a}{n^2 \pi^2}$

Or, $\sum \frac{2a}{n^2 \pi^2}$ converge (Série de Riemann) donc par comparaison, $\sum \|u_n\|_{\infty, [-a, a]}$ converge.

• $|u_n(n)| = \frac{2n}{n^2(1+\pi^2)} = \frac{2}{n} \times \frac{1}{1+\pi^2}$

Par définition, $|u_n(n)| \leq \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ et par comparaison, $\sum \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ diverge

OU $u_n'(x) = \frac{2(n^2 \pi^2 - x^2)}{(x^2 + n^2 \pi^2)^2}$



Donc $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = |u_n(n\pi)| = |u_n(-n\pi)| = \frac{2n\pi}{2n^2\pi^2} = \frac{1}{n\pi}$

Donc $\sum \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ diverge.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n continue sur $[-a, a]$ et $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$ donc par thm de continuité, u est continue sur $[-a, a]$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, elle est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) $f_n: x \mapsto \ln(x^2 + n^2 \pi^2) + C_n$ (Ensemble des primitives de u_n avec $C_n \in \mathbb{R}$)

$f_n(0) = 0 \Leftrightarrow C_n = -\ln(n^2 \pi^2)$

On pose donc $f_n: x \mapsto \ln(x^2 + n^2 \pi^2) - \ln(n^2 \pi^2) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x=0$, $v_n(0) = 0$ et $\sum v_n(0)$ converge.
- Si $x \neq 0$, $v_n(x) \geq 0$ et $v_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2 \pi^2}$ par comparaison à une somme de Riemann, $\sum v_n(x)$ converge.

c) • $V(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

- $v_n \in \mathcal{C}^\infty$, $v_n' = u_n$ (quest° 2a) Soit $a > 0$

1) $v_n \in \mathcal{C}^\infty$, v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$

2) $\sum v_n$ converge simplement sur $[-a, a]$ (car sur $\mathbb{R}$).

3) $\sum v_n' = \sum u_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$ (car convergence normale)

Par le théorème de dérivation, $V: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $V' \quad \quad \quad U$

V est dérivable sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $V' = U$.

$\forall x \in \mathbb{R}$

3) $\forall v_n \in \mathcal{C}^\infty$, $\forall k \geq 1$, $1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} > 0$ donc on peut écrire

$$\ln(p_n(x)) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n v_k(x)$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} V(x)$ par la question 2b.

Par composition de limite, $p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{V(x)}$ Donc $p_n \xrightarrow{\mathcal{CS}, \mathbb{R}} e^V$

Ex 3

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes.

$\forall x \in [a, b]$ $(f_n(x))_n$ est décroissante et convergente vers 0
(car (f_n) converge simplement vers 0)
donc elle est minorée par 0.

Ainsi il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = |f_n(x_n)| = f_n(x_n)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\|f_{n+1}\|_{\infty, [a, b]} - \|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_n)$
 $\leq f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)$ (car $(f_p(x_{n+1}))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante)
 ≤ 0 car $f_n(x_{n+1}) = |f_n(x_{n+1})| \leq \|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(x_n)$.

3) Pour tout $p \leq n$, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_p(x_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ par convergence simple de la suite de fonctions

On a donc : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
pour tout $n \geq N$, $p \geq N$, $\|f_n\|_{\infty} \leq f_p(x_n) \leq \varepsilon$

On a montré que $\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

DS3

Ex 4

1) $\sup \{ r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ bornée} \}$.

2) On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$
 R' $\sum \frac{1}{a_n} z^n$

Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge donc $a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et par opérations $\left| \frac{1}{a_n z^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$\sum \frac{1}{a_n} \left(\frac{1}{z} \right)^n$ diverge donc $R' \leq \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{R'}$,

On a donc $R \leq \frac{1}{R'}$

3) on note R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$

• Soit $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge donc $a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et aussi $a_n^2 z^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $(a_n^2 z^{2n})$ est donc bornée

Ainsi $|z^2| \leq R' \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{R'}$

On a donc $R \leq \sqrt{R'}$.

• Soit $|z| < \sqrt{R'}$ alors $|z^2| < R'$ donc $\sum a_n^2 z^{2n}$ converge

ainsi $|a_n^2 z^{2n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $|a_n z^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$(a_n z^n)$ est bornée donc $|z| \leq R$

On a donc $\sqrt{R'} \in R$.