

Ana : 4,75

Proba : 10,75

Tout à fait d'accord avec ton analyse.

Exercice n°1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: U_n est continue sur $]0; 1[$, par produit de fonction continues.

De plus, $\forall n \geq 2$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} U_n(t) = 0$, par croissance comparée, donc, $\forall n \geq 2$, U_n est

prolongeable par continuité en 0 par $\tilde{U}_n(0) = 0$.

De plus, $U_n(t) \sqrt{t} = - \frac{\ln(t)}{n} \sqrt{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0} 0$, par croissance comparée.

Donc $U_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0, 1]$, par lien avec

de signe fixe. Donc, par comparaison, U_n est intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, U_n est intégrable sur $[0, 1]$. ✓

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 U_n(t) dt = \int_0^1 - \frac{t^{n-1} \ln(t)}{n} dt$. On procède à une IPP avec

$u = \ln(t)$ et $u' = t^{n-1}$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 U_n(t) dt = - \frac{1}{n} \left(\left[\frac{t^n}{n} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n} \times \frac{1}{t} dt \right)$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 U_n(t) dt = + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n} dt = \frac{1}{n^2}.$$

par croissance comp.

2) $t \mapsto \ln(1-t)$ est développable en série entière sur $[-1; 1[$. On a donc,

→ Développement de $\ln(1-t)$

$$\forall t \in]0; 1[, f(t) = \frac{\ln(t)}{t} \left(- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} - \frac{\ln(t) t^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} - \frac{\ln(t) t^{n-1}}{n}$$

car f non définie pour $t \leq 0$.

$$\text{Ainsi, } \forall t \in]0; 1[, f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)$$

$$I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) dt.$$

On, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) dt$ est le développement en série entière de $f(t)$, $\forall t \in]0, 1[$

On a donc, par théorème d'intégration de DSE, $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$

Donc, d'après la question précédente, $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

3a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \geq n$, $\forall t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k^3} \geq \frac{1}{t^3} \geq \frac{1}{(k+1)^3}$.

D'où, par croissance de l'intégrale ($k \leq k+1$): $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3} dt$

On a alors, $\forall k \geq n$, $\forall t \in [k; k+1]$: $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \geq \frac{1}{(k+1)^3}$

D'où, en sommant pour k allant de n à $+\infty$: $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \geq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$.

En posant, dans la somme de droite, $j = k+1$: $\left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^{+\infty} \geq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^3}$.

Soit finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geq R_n$.

3b) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $I = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} + R_N$.

On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $R_N \leq 10^{-3}$. On sait que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \leq \frac{1}{2n^2}$.

On cherche donc $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2N_0^2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2N_0^2 \geq 10^3$

$\Leftrightarrow N_0 \geq \sqrt{500}$. On, $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$.

On doit donc avoir $N_0 \geq 23$. Donc, $\forall n \geq 23$, $R_n \leq 10^{-3}$.

Donc $\sum_{n=1}^{23} \frac{1}{n^3} \approx 1,20115$ est une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Exercice n°2:

1) $D_2 = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Ainsi, $v_2 = P(D_2) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2})$. Or, les lancers successifs sont indépendants. Ainsi, les événements F_1 et F_2 sont indépendants et, par conséquent, les événements $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ aussi. Donc $v_2 = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = \frac{4}{9}$.

On veut obtenir, pour D_3 , le premier double-pile au 3^e lancer. Il est donc nécessaire d'obtenir un pile au 2^eme et au 3^eme lancer. Si on obtient un pile au premier lancer, on aura le second pile au 2^eme lancer qui provoquera un double pile. On aura donc le premier double pile au 2^eme lancer et non pas au 3^eme. Ce sera donc l'événement D_2 et non l'événement D_3 qui sera réalisé. On est donc obligé d'avoir un face au premier lancer.

On a alors $D_3 = (F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$. Donc $v_3 = P(D_3) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$.

Or, les lancers successifs sont indépendants, donc les événements $F_1, \overline{F_2}$ et $\overline{F_3}$ aussi.

$$\text{Donc } v_3 = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

$$v_3 = \frac{4}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times 0 = \frac{1}{3} v_2 + \frac{2}{9} v_1.$$

2) Soit $n \geq 2$: $(F_n, \overline{F_n})$ est un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, $P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2}) = P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap F_n) + P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap \overline{F_n})$.

Or, $P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap \overline{F_n}) = \underbrace{P_{F_1 \cap \overline{F_n}}^{F_1}(D_{n+2})}_{\text{Formule}} P_{F_1}^{F_1}(\overline{F_n})$. Or, $P_{F_1 \cap \overline{F_n}}^{F_1}(D_{n+2})$ est la probabilité

de l'événement "On obtient pour la première fois un double pile au $n+2$ ^eme lancer sachant qu'on a déjà obtenu pile aux 2 premiers lancers". Cet événement est impossible: si on a obtenu pile aux 2 premiers lancers, le premier double pile s'est produit au 2^eme lancer, et non pas au $n+2$ ^eme (car $n \neq 0$).

On a donc, pour tout $n \geq 2$, $P_{F_1 \cap \overline{F_n}}^{F_1}(D_{n+2}) = 0$. Par conséquent, $P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap \overline{F_n}) = 0$.

On en conclut alors que $P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2}) = P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap F_n) + 0 = P_{F_1}^{F_1}(D_{n+2} \cap F_n)$.

$$\text{On, } P_{\bar{F}_1}(D_{n+2} \cap F_2) = \frac{P(\bar{F}_1 \cap (D_{n+2} \cap F_2))}{P(\bar{F}_1)} = \frac{P((\bar{F}_1 \cap F_2) \cap D_{n+2})}{P(\bar{F}_1)} = \frac{P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2}) P(\bar{F}_1 \cap F_2)}{P(\bar{F}_1)}$$

$$\text{Donc } P_{\bar{F}_1}(D_{n+2} \cap F_2) = \frac{P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2}) P_{\bar{F}_1}(F_2) P(\bar{F}_1)}{P(\bar{F}_1)} = P_{\bar{F}_1}(F_2) P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2})$$

On, $P_{\bar{F}_1}(F_2) = P(F_2)$, par indépendance de lancers successifs.

De plus, l'événement "Obtenir le 1^{er} Double Pile au $n+2$ -ième lancer sachant qu'on a obtenu face au 2^{ème} lancer et pile au 1^{er}" a la même

probabilité que "Obtenir le 1^{er} double pile au n -ième lancer".

Effectivement, on sait qu'on a pas obtenu de double pile aux 2 premiers lancers et l'indépendance des lancers successifs, combiné avec le fait qu'on ait pas eu de pile au 2-ème lancer (qui aurait pu influencer l'apparition d'un double pile plus tôt) garantit l'indépendance des n -prochains lancers.

$$\text{On a donc } P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2}) = P(D_n) = v_n.$$

$$\text{Donc } P_{\bar{F}_1}(F_2) P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2}) = P(F_2) v_n = \frac{1}{3} v_n.$$

On a donc montré, $\forall n \geq 2$:

$$P_{\bar{F}_1}(D_{n+2}) = P_{\bar{F}_1}(D_{n+2} \cap F_2) = P_{\bar{F}_1}(F_2) P_{\bar{F}_1 \cap F_2}(D_{n+2}) = \frac{1}{3} v_n.$$

3) $(F_1, \bar{F}_1)$ forme un système complet d'événement. On a alors, par la formule des probabilités totales: $P(D_{n+2}) = P(D_{n+2} \cap \bar{F}_1) + P(D_{n+2} \cap F_1)$. Puis, par formule des probabilités composées ($P(F_1) \neq 0$ et $P(\bar{F}_1) \neq 0$):

$$P(D_{n+2}) = P(\bar{F}_1) P_{\bar{F}_1}(D_{n+2}) + P(F_1) P_{F_1}(D_{n+2}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} v_n + P(F_1) P_{F_1}(D_{n+2}).$$

Montrons que $P_{F_1}(D_{n+2}) = P(D_{n+1})$: l'événement "obtenir le premier Double Pile au $n+2$ -ième lancer sachant qu'on a obtenu face au 1^{er} lancer" a la

même probabilité que "Obtenir le premier double pile au $n+1$ -ième lancer":

Effectivement, on connaît l'issue du premier lancer et celui-ci n'influence pas les lancers suivants, puisqu'on a obtenu Face, tout se passe comme si on "initialisait" le comptage de lancers au lancer n°2, qu'on considère désormais comme notre nouveau premier lancer. On a donc $P_{F_i}(D_{n+1}) = P(D_{n+1}) = v_{n+1}$.

2

$$\text{Donc finalement, } v_{n+2} = P(D_{n+2}) = \frac{2}{9} v_n + \frac{1}{3} P_{F_i}(D_{n+2}) = \frac{2}{9} v_n + \frac{1}{3} v_{n+1}.$$

h) On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $v_{n+2} = \frac{1}{3} v_{n+1} + \frac{2}{9} v_n$.

On pose le polynôme caractéristique : $P(x) = x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$.

On cherche les racines de ce polynôme. $\Delta = \frac{1}{9} + 4 \times \frac{2}{9} = 1$

On a alors : $x_1 = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{+\frac{1}{3}}{2} = +\frac{1}{6}$.

Donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = a \left(-\frac{1}{6}\right)^n + b \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

$$\text{Mais } v_1 = 0 \Rightarrow a \left(-\frac{1}{6}\right)^1 + b \left(\frac{1}{6}\right)^1 = 0 \Rightarrow 2b = a$$

$$\text{De plus, } v_2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + b \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}, \text{ d'où : } \begin{cases} 2b = a \\ a + 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a \\ a = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

1

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$5) \forall n \geq 2, E_n = \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \dots \cap \overline{D_n} = \bigcap_{i=2}^n \overline{D_i} = \overline{\bigcup_{i=2}^n D_i}$$

Soient $p, m \geq 2$, avec $p \neq m$. L'événement $D_p \cap D_m$ est l'événement "

Le premier double pile apparaît au p -ième et au m -ième lancers, avec $p \neq m$."

Il est clair que $P(D_p \cap D_m) = 0$. ^{$D_p \cap D_m = \emptyset$} Donc les D_i , $i \in \{2, \dots, n\}$, sont

disjoints, d'où : $P(E_n) = P\left(\bigcap_{i=2}^n \overline{D_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=2}^n D_i\right) = 1 - \sum_{i=2}^n P(D_i)$, $\forall n \geq 2$.

$$\text{Ainsi, } \forall n \geq 2, P(E_n) = 1 - \sum_{i=2}^n v_i$$

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $P(E_n) = 1 - \sum_{i=2}^n \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^i + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^i$.

Donc $P(E_n) = 1 - \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$

Donc, $\forall n \geq 2$, $P(E_n) = 1 - \left(\frac{1}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{8}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \right)$

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $P(E_n) = \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{8}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

6) Soit E l'événement "N'obtenir jamais de Double Pile".

$E = \bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$

On, soit $n \geq 2$, E_{n+1} est l'événement "Ne pas obtenir de double pile aucun des $n+1$ premiers lancers". $E_{n+1} \Rightarrow E_n$, donc $E_{n+1} \subseteq E_n$.

Donc (E_n) est une suite d'événements décroissante, au sens de l'inclusion.

Donc $P(E) = P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$, par continuité monotone.

On en conclut que $P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{8}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) = 0$.

Ainsi, la probabilité de ne jamais obtenir de Double Pile est nulle.

Exercice n°3:

a) a) la n -ième boule noire peut apparaître à partir du n -ième tirage.

Ainsi, $X_n(\omega) = \mathbb{I}_{[n; +\infty[}$

1) b) Soit $k \in X_n(\omega)$. $P(X_n = k) = p^n q^{k-n} \binom{k-1}{n-1}$

On a tiré n boules noires

On a tiré $k-n$ boules noires

↑ position des $n-1$ premières boules noires parmi les $k-1$ premières position, la n -ième boule noire étant forcément en k -ième position.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1; 1[$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^n}$

f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$ et, $\forall x \in] -1; 1[$, $f_n'(x) = \frac{n}{(1-x)^{n+1}}$

Donc, $\forall x \in] -R; R[$, f est solution de l'équation différentielle

$(1-x)f'(x) = n f(x)$. Supposons que f soit développable en série

entière sur $] -R; R[$, $R \leq 1$. Alors, $\forall x \in] -R; R[$:

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = n \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (\Rightarrow) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = R \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^n [(n+1) a_{n+1} - n a_n - R a_n] + R a_0 = 0$$

Ainsi, par unicité du DSE sur $] -R; R[$, $\left. \begin{array}{l} R a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) a_{n+1} = a_n (R+n) \end{array} \right\}$

Donc $a_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n \frac{(R+n)}{(n+1)}$

On montre par récurrence immédiate que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_1 \frac{(R+n-1)!}{(n-1)!}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_1 \binom{R+n-1}{n-1}$

Donc, $\forall x \in] -R; R[$, $\frac{1}{(1-x)^n} = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{R+n-1}{n-1} x^n$

On pose $j = n+1$. On a alors, $\forall x \in] -R; R[$, $\frac{1}{(1-x)^n} = a_1 \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j}{n} x^{j-n}$

Donc, par unicité du DSE, $\forall x \in] -1; 1[$, $\frac{1}{(1-x)^n} = a_1 \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j}{n} x^{j-n}$

On a donc que $a_1 = 1$. $\rightarrow$ On trouve a_1 grâce à la dérivée en 0.

$$\begin{aligned}
 E(x_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n P(x_n = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{n-1}{n-1} p^n q^{n-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \binom{n}{n-1} p^n q^{n+1-n} \\
 &= p^n \left(q \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{n-1} q^{n-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{n-1} q^{n+1-n} \right)
 \end{aligned}$$

pas bonne idée

Donc $E(x_n) = p^n \left(q \times \left(\frac{1}{(1-q)^n} \right)' + \frac{1}{(1-q)^n} \right) = p^n \left(q \frac{n}{(1-q)^{n+1}} + \frac{1}{(1-q)^n} \right)$

$$E(x_n) = p^n \left(\frac{qn}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n} \right) = 1 + \frac{qn}{p}$$

Méthode alternative pour Ex 3:

• On reconnaît une dérivée nième

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{n} (-x)^n = \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{n}{k-n+1} (-x)^{k-n+1} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{-n}{k-n+1} x^{k-n+1} \frac{1}{(-1)^{k-n+1}}$$

$$\text{donc } \binom{-n}{k-n+1} = \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n-(k-n+1)+1)}{(k-n+1)!} = \frac{(-n)(-n+1)\dots(-1)(-k)}{(k-n+1)!}$$

$$\text{donc } \binom{-n}{k-n+1} = (-1)^{k-n+1} \frac{k!}{(n-1)! (k+1)!} = (-1)^{k-n+1} \binom{k}{n-1}$$