

DSS

Ex 1

1) a) N représente le rang du 1^{er} succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $\frac{n}{n+b}$
donc $N \sim \mathcal{G}\left(\frac{n}{n+b}\right)$

De même, $B \sim \mathcal{G}\left(\frac{b}{n+b}\right)$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(N=k) \cap (B=k) = \emptyset$ car la 1^{re} boule noire et la 1^{re} boule blanche ne peuvent pas apparaître au même tirage.

Donc $P((N=k) \cap (B=k)) = 0$

En particulier $P((N=1) \cap (B=1)) = 0 \neq P(N=1)P(B=1)$

Donc N et B ne sont pas indépendantes

2) a) Soient $k, i \in \mathbb{N}^*$ $(X=k) \cap (Y=i) = (N_1 \cap \dots \cap N_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_{k+i} \cap N_{k+i+1})$
 $\cap (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \dots \cap N_{k+i} \cap B_{k+i+1})$

en notant N_i : la i ^{ème} boule tirée est noire $P(N_i) = \frac{n}{n+b}$
 B_i : la i ^{ème} boule tirée est blanche $P(B_i) = \frac{b}{n+b}$

par union disjointe et comme B_j, N_j sont indépendants 2 à 2

$$P((X=k) \cap (Y=i)) = \left(\frac{n}{n+b}\right)^{k+1} \left(\frac{b}{n+b}\right)^i + \left(\frac{b}{n+b}\right)^{k+1} \left(\frac{n}{n+b}\right)^i$$

Dans la suite, on note $p = \frac{n}{n+b}$ et $q = \frac{b}{n+b}$ sachant que $p+q=1$

b) la loi conjointe détermine les lois marginales.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=i)) \\ &= p^{k+1} \sum_{i=1}^{+\infty} q^i + q^{k+1} \sum_{i=1}^{+\infty} p^i \\ &= p^{k+1} \frac{q}{1-q} + q^{k+1} \frac{p}{1-p} \\ &= p^k q + q^k p. \end{aligned}$$

car $(Y=i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements

c) Comme $p, q \in]0, 1[$, par dérivée d'un développement en série entière dont le rayon de convergence est 1 ($\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$)
 $\sum k P(X=k)$ converge

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k) = qp \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} + qp \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} \\
 &= qp \times \frac{1}{(1-p)^2} + qp \times \frac{1}{(1-q)^2} \\
 &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.
 \end{aligned}$$

$$d) (X=Y) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} ((X=n) \cap (Y=n))$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par union disjointe, } P(X=Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((X=n) \cap (Y=n)) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} q^n + q^{n+1} p^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (pq)^n \\
 &= \frac{pq}{1-pq}.
 \end{aligned}$$

Ex 2.

1) a) i) $\forall p \in [1, n-1]$, $P(\bigcap_{i=1}^p B_i) = \prod_{i=1}^p P(B_i)$ par indépendance des B_i

• $(B_n, \overline{B_n})$ forme un système complet d'événements donc par la formule des probabilités totales, $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i) = P(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \cap B_n) + P(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \cap \overline{B_n})$

$$\text{Ainsi } P(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \cap \overline{B_n}) = P(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i) - P(\bigcap_{i=1}^n B_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(B_i) - \prod_{i=1}^n P(B_i)$$

par indépendance des B_i

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(B_i) (1 - P(B_n))$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(B_i) \times P(\overline{B_n})$$

ii) Par récurrence sur k .

• $k=1$, question précédente

• Supposons la propriété vraie au rang $k \in [1, n-1]$

Par hypothèse de récurrence, $B_1, \dots, B_{n-k-1}, \overline{B_{n-k+1}}, \dots, \overline{B_n}, B_{n-k}$ sont mutuellement indépendants. Par la propriété au rang 1,

$B_1, \dots, B_{n-k-1}, \overline{B_{n-k+1}}, \dots, \overline{B_n}, \overline{B_{n-k}}$ sont mutuellement indépendants. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$

$$P(\bigcap_{i=1}^n 1_{A_i} = x_i) = P(\bigcap_{i=1}^n B_i) \text{ en notant } B_i = (1_{A_i} = x_i) = \begin{cases} A_i & \text{si } x_i = 1 \\ \overline{A_i} & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

Comme $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, par la question précédente, $B_1, \dots, B_n$ sont aussi mutuellement indépendants.

$$\text{Ainsi } P(\bigcap_{i=1}^n 1_{A_i} = x_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) = \prod_{i=1}^n P(1_{A_i} = x_i)$$

2) Par linéarité de l'espérance, $E(R_n) = \sum_{k=1}^n E(\mathbb{1}_{A_k})$

$$\text{On } E(\mathbb{1}_{A_k}) = 0 \times P(\mathbb{1}_{A_k} = 0) + 1 \times P(\mathbb{1}_{A_k} = 1) = P(A_k)$$

$$\text{Donc } E(R_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

• Comme $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables mutuellement indépendantes,

$$V(R_n) = V\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^n V(\mathbb{1}_{A_k})$$

$$\begin{aligned} \text{On } \forall k \in \mathbb{N}^*, V(\mathbb{1}_{A_k}) &= E(\mathbb{1}_{A_k}^2) - E(\mathbb{1}_{A_k})^2 \\ &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{car } \mathbb{1}_{A_k}^2 = \mathbb{1}_{A_k}. \end{aligned}$$

3/a) Par indépendance mutuelle, $G_{R_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{A_k}(t)$

$$\begin{aligned} \text{On } \forall k \in \mathbb{N}^*, G_{A_k}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(\mathbb{1}_{A_k} = n) = P(\mathbb{1}_{A_k} = 0) + t P(\mathbb{1}_{A_k} = 1) \\ &= P(\overline{A_k}) + t P(A_k) = 1 - \frac{1}{k} + \frac{t}{k} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in \mathbb{R}, G_{R_n}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{k-1+t}{k} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k-1+t)$$

b) Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $G_{R_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(R_n = k)$

$$\text{Donc par développement en série entière, } \forall k \in \mathbb{N}, P(R_n = k) = \frac{G_{R_n}^{(k)}(0)}{k!}$$

En particulier, $P(R_n = 0) = G_{R_n}(0) = 0$ (le 1^{er} terme du produit vaut

$$P(R_n = 1) = G'_{R_n}(0)$$

$$\text{On peut noter } G_{R_n}(t) = \frac{t}{n!} \prod_{k=2}^n (k-1+t) = \frac{t f_n(t)}{n!} \quad \text{avec } f_n(t) = \prod_{k=2}^n (k-1+t)$$

$$\text{donc } G'_{R_n}(0) = \frac{1}{n!} (0 \times f'_n(0) + f_n(0)) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

4) a) $V(R_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ Par Riemann, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge

donc il existe $l \in \mathbb{R}$ ($l = \frac{\pi^2}{6}$) tel que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = l$

Donc $\frac{V(R_n)}{E(n)} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{E(n)} - \frac{l}{E(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ On a montré que $V(R_n) \sim E(n)$

b) On note $U_n = \frac{R_n}{E(n)}$ alors $E(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $V(U_n) = \frac{V(R_n)}{E(n)^2} \sim \frac{1}{E(n)}$

Par définition de limite, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |E(U_n) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Par inégalité triangulaire, $|U_n - E(U_n)| \geq |U_n - 1| - |E(U_n) - 1|$

donc $\forall n \geq N, |U_n - E(U_n)| \geq |U_n - 1| - \frac{\varepsilon}{2}$

Si $|U_n - 1| \geq \varepsilon$ alors $|U_n - E(U_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

On a donc montré que $(|U_n - 1| \geq \varepsilon) \subset (|U_n - E(U_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2})$

c) Par croissance de probabilité, $P(|U_n - 1| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - E(U_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2})$

Par l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev,

$P(|U_n - E(U_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{V(U_n)}{\frac{\varepsilon^2}{4}}$ et $V(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$