

16/22.

Exercice n°1:

1) a) $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -3 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)(X+1)$. A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples.

$\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $Ax = -x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ -y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$.

On a alors $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $Ax = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 2x \\ -y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $B = (u, v)$ est libre car u et v sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes. ✓

De plus, $\text{rg}(B) = \text{card}(B) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Donc B est une base de $\mathbb{R}^2$. ✓

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . On pose E la base canonique de $\mathbb{R}^2$. $\text{Mat}_{E,E}(f) = \text{Mat}_{B,E}(I_2) \text{Mat}_{B,B}(f) \text{Mat}_{E,B}(I_2)$.

Donc $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ✓ 2.

1) b) A est diagonalisable d'après la question précédente et la matrice nulle est 0-nilpotente. $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonalisable}}}{A} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nilpotente}}}{O_2}$ et A et O_2 commutent.

Ainsi, la décomposition de Dunford de A est (A, O_2) . ✓ 0,5.

$$2) a) \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -8 \\ -3 & x+1 & -6 \\ 2 & 0 & x+5 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & -8 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix}$$

↑ développement par rapport à la seconde colonne

Ainsi, $\chi_A(x) = (x+1)[(x-3)(x+5) + 16] = (x+1)(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^3$ ✓ 0,5

2) b) $S_p(A) = \{-1\}$. A n'est pas diagonalisable car sinon A serait semblable à $-Id$ donc A serait égale à $-I_3$, ce qui n'est pas le cas.

On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Donc $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Donc $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. donc $A + I_3$ est 2-nilpotente.

(Avec Cayley-Hamilton, on avait $\chi_A(A) = 0$ donc $(A + I_3)^3 = 0$ donc $A + I_3$ est au plus 3-nilpotente).

On, $A \neq \underbrace{A + I_3}_{\text{nilpotente}} - \underbrace{I_3}_{\text{diagonalisable car diagonale}}$ et $(A + I_3)(-I_3) = -I_3(A + I_3)$. ✓

Ainsi, la décomposition de Dunford de A est $(-I_3; A + I_3)$. ✓ 1,5

3) a) On pose $P(x) = x(x-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n)$.

On, $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - A + A - I_n^2 = A^2 - I_n$, car A et Id commutent.

On a donc $P(A^2) = A^2 \underbrace{(A - I_n)(A + I_n)}_{\text{On, par hypothèse.}}$

Ainsi, $P(A^2) = O_n(A + I_n) = O_n$. Donc A^2 annule P, c'est-à-dire, $x(x-1)$ est annulateur de A^2 . ✓ 0,5

3) b) $x(x-1)$ est annulateur de A^2 . Les racines de ce polynôme sont 0 et 1.

Ainsi, $S_p(A^2) \subseteq \{0, 1\}$.

↳ $\mathbb{C}$ est surdo à racines simples (Pas besoin de ça)
 • Si $S_p(A^2) = \{0, 1\}$, alors A^2 est annulé par $\prod_{\lambda \in S_p(A^2)} (x - \lambda) = x(x-1)$.

Ainsi, A^2 est diagonalisable.

De plus, $A^2(A - A^2) = A^3 - A^4 = (A - A^2)A^2$. Donc A^2 et $(A - A^2)$ commutent.

On a aussi $(A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)^2 = \underbrace{A^2(A - I_n)(A - I_n)}_{=0_n \text{ par hypothèse}}.$

Donc $A - A^2$ est nilpotente.

Ainsi si $\text{Sp}(A^2) = \{0, 1\}$, la décomposition de Dunford de A est $(A^2; A - A^2)$.

• Si $\text{Sp}(A^2) = \{0\}$, A^2 est annulée par X^n (son polynôme caractéristique, par Cayley-Hamilton), donc A^2 est nilpotente. Si A^2 n'est pas la matrice nulle, alors elle n'est pas diagonalisable car si A^2 était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle, donc A^2 serait la matrice nulle.

• Si $\text{Sp}(A^2) = \{0\}$ et A^2 est la matrice nulle, alors $A - A^2$ est 2-nilpotente, A^2 est diagonalisable et A^2 et $A - A^2$ commutent donc la décomposition de Dunford de A est $(A^2, A - A^2)$.

• Si $\text{Sp}(A^2) = \{1\}$, alors soit A^2 est l'identité et la décomposition de Dunford est alors $(A^2, A - A^2)$, soit A^2 n'est pas l'identité donc n'est pas diagonalisable et la décomposition de Dunford proposée ne fonctionne pas.

4) a) i) Soit $\lambda_i \in \text{Sp}(u)$. Soit $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Comme u et v commutent, on a $u(v(x)) = v(u(x))$. Or, $x \in E_{\lambda_i}(u)$ donc $u(x) = \lambda_i x$.

Ainsi, $u(v(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$. Ainsi, $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$. On en conclut que

$\forall \lambda_i \in \text{Sp}(u)$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v .

4) b) Soient A, B deux matrices de $M_n(K)$ diagonalisables et qui commutent. On pose u l'endomorphisme canoniquement associé à A et v l'endomorphisme canoniquement associé à B .
On pose E la base canonique de E . Comme A et B commutent et sont diagonalisables, alors u et v commutent et sont diagonalisables. Ainsi, d'après la question 4) a) ii), il existe une base B' commune de diagonalisation.

$$\text{On a alors } \text{Mat}_{E,E}(u) = \text{Mat}_{B',E}(\text{Id}) \text{Mat}_{B',B'}(u) \text{Mat}_{E,B'}(u)$$

$$\text{et } \text{Mat}_{E,E}(v) = \text{Mat}_{B',E}(\text{Id}) \text{Mat}_{B',B'}(v) \text{Mat}_{E,B'}(v).$$

$$\text{On pose } P = \text{Mat}_{B',E}(\text{Id}) \text{ et } P^{-1} = \text{Mat}_{E,B'}.$$

$$\text{On a alors } D = \text{Mat}_{B',B'}(u) \text{ qui est diagonale et } T = \text{Mat}_{B',B'}(v) \text{ qui est aussi diagonale.}$$

$$\text{Donc } A = PDP^{-1} \text{ et } B = PTP^{-1}, \text{ avec } D \text{ et } T \text{ diagonales.}$$

Autrement dit, $A - B = P(D - T)P^{-1}$. D et T sont diagonales donc $D - T$ l'est aussi. on pose $D - T = R$, matrice diagonale.

$$\text{On a alors } A - B = P R P^{-1} \text{ avec } R \text{ diagonale. Donc } A - B \text{ est diagonalisable.}$$

4) c) Calculons $(A - B)^{p+q-1}$: A et B commutent donc A et $-B$ commutent.

Donc, d'après le binôme de Newton :

$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-B)^{p+q-1-k} = \sum_{k=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Or, $\forall k < p, A^k = 0$, par définition, donc la somme de gauche est une somme nulle,

$$\text{donc } (A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}. \text{ On pose } j = p+q-1-k.$$

$$\text{Alors } k = p+q-1-j \text{ et } k=0 \Rightarrow j = p+q-1 \text{ et } k=p-1 \Rightarrow j = q.$$

$$\text{Donc } (A - B)^{p+q-1} = \sum_{j=q}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{p+q-1-j} A^{p+q-1-j} B^j. \text{ Or, } \forall j > q, B^j = 0, \text{ par définition.}$$

Ainsi, $(A-B)^{p+q-1} = 0_n$. Donc $p+q-1 \in \{k \in \mathbb{N}, (A-B)^k = 0_n\}$.

Or, l'indice de nilpotence est le minimum de $\{k \in \mathbb{N} \mid (A-B)^k = 0_n\}$.

Donc $p+q-1 \geq l$, avec l l'indice de nilpotence de $A-B$.

Donc $A-B$ est nilpotente d'indice maximum $p+q-1$.

4)d). Procédons par analyse-synthèse:

Analyse: Si A est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}$, alors x^p annule A . Donc $\text{Sp}(A) \subseteq \{0\}$, unique racine du polynôme x^p .

Si de plus A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale avec uniquement des 0 sur la diagonale, c'est à dire la matrice nulle.

Donc si A est nilpotente et diagonalisable, alors A est la matrice nulle.

Synthèse: Réciproquement, si A est la matrice nulle, alors elle est diagonale. De plus, $A^1 = 0_n$, donc A est nilpotente.

Ainsi, la seule matrice de $M_n(K)$ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle 0_n .

4)e). Soit $A \in M_n(K)$, supposons qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') respectant la décomposition de Dunford pour A . On note p l'indice de nilpotence de N et q l'indice de nilpotence de N' , D et D' sont des matrices diagonalisables.

On a alors $A = D + N$ et $A = D' + N'$. Donc $D + N = D' + N'$, on enca

~~$D = D' + N' - N$~~ ~~Ainsi, $DD' = D'N'D' = ND' + (D')^2$~~

~~$D' - D = N - N'$. D et D' sont diagonales donc elles commutent.~~

~~et si on ne le suppose pas!?~~

Ainsi, en supposant que D et D' commutent on a, d'après la question 4)b) que

$D' - D$ est diagonalisable. On a aussi, d'après la question 4)b) que $N - N'$ est nilpotente d'indice au plus $p+q-1$.

Ainsi, $D' - D$ est diagonalisable et nilpotente donc d'après la question précédente,

$D' - D = 0_n$. Donc $N' - N = 0$.

Ainsi, $D' = D$ et $N' = N$. Donc la décomposition de Dunford est unique.

5) le théorème admet pour l'exercice justifie l'existence de la décomposition de Dunford si X_A est scindé sur K .

Soit $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Alors $X_A(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$.

Donc $A^2 + A + I_2$ est nilpotente. Donc $A^2 = -A - I_2$.
 $= 0$ par thm de Cayley-Hamilton

S'il existait une décomposition de Dunford, on aurait pq que celle là ?

$A = \underbrace{A^2 + A + I_2}_{=0} + \underbrace{(-A^2 - I_2)}_{=A}$
ca n'en est pas une.
A, qui n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Donc $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'admet pas de décomposition de Dunford dans $\mathbb{R}$.

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $X_A(x) = x^2 + 1$. Si A admet une décomposition de Dunford, $X_A = X_D$ ou, D diagonalisable donc X_D scindé, ce qui n'est pas le cas.

Exercice n°2:

1) le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples donc f est diagonalisable (car f admet n valeurs propres, de multiplicité 1 donc dont la dimension de chacun des espaces propres est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée).
Ainsi, comme f est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires de E .

on veut redémontrer
0,5

2)a) $-\frac{1}{2}P_1(x) + \frac{1}{2}P_2(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Donc $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ 0,5

2)b) P_1 et P_2 sont des polynômes de degré 1 sans racine commune. Ainsi, d'après le lemme des noyaux, $\text{Ker}(P_1(f)) \oplus \text{Ker}(P_2(f)) = \text{Ker}((P_1 P_2)(f))$.

De plus, $(f - \text{Id})(f + \text{Id}) = 0$. Donc, $\forall x \in E$, $(f(x) - x)(f(x) + x) = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(R_1 R_2(f)) = E$. ✓

On a donc, d'après le lemme des noyaux: $E = \text{Ker}(R_1(f)) \oplus \text{Ker}(R_2(f)) = K_1 \oplus K_2$.

Soit $x \in E$. Comme $E = K_1 \oplus K_2$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. ✓

$$p_1(x) = p_1(x_1) + p_1(x_2) = x_1, \text{ car } \text{Ker}(p_1) = K_2$$

$$\text{Or, } x_1 \in K_1 \Leftrightarrow x_1 \in \text{Ker}(R_1(f)) \Leftrightarrow x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$$

$$\text{Ainsi, } x_1 = f(x_1), \text{ d'où } \frac{x_1}{2} = \frac{f(x_1)}{2}.$$

$$\text{De plus, } x_2 \in K_2 \Leftrightarrow \frac{x_2}{2} = -\frac{f(x_2)}{2} \Leftrightarrow \frac{x_2}{2} + \frac{f(x_2)}{2} = 0.$$

$$\text{Donc } p_1(x) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_1}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{f(x_2)}{2}$$

$$\text{Donc } p_1(x) = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2} (x + f(x)) = b R_2(f)(x).$$

$$\text{d'où } p_1 = b R_2(f). \quad \checkmark$$

$$\text{De plus, } p_2(x) = x_2 \text{ car } \text{Ker}(p_2) = K_1$$

$$\text{Donc } p_2(x) = \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1}{2} = -\frac{f(x_2)}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2} - \frac{f(x_1)}{2}$$

$$\text{Donc } p_2(x) = -\frac{1}{2} (f(x_1) + f(x_2) - x_1 - x_2) = -\frac{1}{2} (f(x) - x) = a R_1(f)(x).$$

$$\text{Ainsi, } p_2 = a R_1(f). \quad \checkmark \quad 1,5.$$

2c) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ p_1 = p_1$ et $f^k \circ p_2 = (-1)^k p_2$.

Initialisation: Pour $k=0$, $f^k = \text{Id}$, donc $\text{Id} \circ p_1 = p_1$ et $\text{Id} \circ p_2 = (-1)^0 p_2$. ✓

Donc la propriété est vraie au rang 0, elle est initialisée.

Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k \circ p_1 = p_1$ et $f^k \circ p_2 = (-1)^k p_2$.

$$p_1 = b R_2(f) = \frac{f}{2} + \frac{\text{Id}}{2} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{f}{2} + \frac{\text{Id}}{2}.$$

$$\text{Donc } f = p_1 - p_2.$$

Montrons que $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}$ et que $p_1 \circ p_1 = \tilde{0}$: Soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \in K, x_i$ (peut être admis par def des projecteurs)

$$p_1(p_2(x)) = p_1(x_2) = 0. \quad p_2(p_1(x)) = p_2(x_1) = 0.$$

Ainsi, $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}$. $f^{k+1} \circ p_1 = f \circ p_1$, par hypothèse de récurrence.

Donc $f^{k+1} \circ p_1 = (p_1 - p_2) \circ p_1 = p_1^2 - p_2 \circ p_1 = p_1$ car p_1 est un projecteur et $p_2 \circ p_1 = \tilde{0}$.

$$f^{k+1} \circ p_2 = f \circ (-1)^k p_2 = (p_1 - p_2) \circ (-1)^k p_2 = (-1)^k p_1 \circ p_2 + (-1)^{k+1} p_2^2 = (-1)^{k+1} p_2$$

car p_2 est une projection.

$$\text{Donc } f^{k+1} \circ p_1 = p_1 \text{ et } f^{k+1} \circ p_2 = (-1)^{k+1} p_2.$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée donc, d'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, f^n \circ p_1 = p_1$ et $f^n \circ p_2 = p_2$.

1,5

2) d) $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \circ p_1 = p_1$ et $f^k \circ p_2 = (-1)^k p_2$. On, $p_1 = \frac{1}{2}(f + \text{Id})$ et $p_2 = -\frac{1}{2}(f - \text{Id})$

$$\text{Donc, } \forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} + f^k = f + \text{Id} \text{ et } -f^{k+1} + f^k = (-1)^k (\text{Id} - f).$$

Donc en sommant ces deux égalités, on obtient, $\forall k \in \mathbb{N}, 2f^k = f(1 - (-1)^k) + \text{Id}(1 + (-1)^k)$.

$$\text{On en déduit, } \forall k \in \mathbb{N}, f^k = f\left(\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})(-1)^k\right) + \text{Id}\left(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})(-1)^k\right).$$

$$\text{Soit finalement, } \forall k \in \mathbb{N}, f^k = f(b + a(-1)^k) + \text{Id}(b - a(-1)^k).$$

0,5

Concurrence 4)a) ii):

u et v diagonalisables p et commutent. $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), v(E_\lambda(u)) \subseteq E_\lambda(u)$.
 $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

$$V_i = \bigcup_{E_{\lambda_i}(u)} E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$$

V diagonalisable donc V_i diagonalisable. Il existe B_i une base de $E_{\lambda_i}(u)$ et $\text{Mat}_{B_i}(v_i)$ diagonale, formée de $\vec{v}_p$ de V_i .

$$B = (B_1, \dots, B_p) \text{ est une base de } E \text{ par (*)}. \text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{B_1}(v_1) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{B_2}(v_2) & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Paris, $\forall i \in \{1, p\}, \text{Mat}_{B_i}(v_i)$ diagonale donc finalement, $\text{Mat}_B(v)$ diagonale.

Proposition de Correction pour le DS6

Baptiste Bonelli

Juillet 2025

1 Proposition de correction pour les questions mal traitées par votre serviteur

1.1 Exercice n°1

3)b) A^2 possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc A^2 est diagonalisable. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D' appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = PD'P^{-1}$.

Or $A = A^2 + A - A^2$.

On pose $D = A^2$ et on pose $N = A - A^2$, $N = A(I_n - A)$ donc $N^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(I_n - A)(I_n + A) = -A^2(I_n - A)(I_n + A) = 0$.

Ainsi, A^2 est diagonalisable et $A - A^2$ est nilpotente d'ordre 2. On vérifie aisément que A^2 et $A - A^2$ commutent et que $A = A^2 + A - A^2$.

On en conclut que la décomposition de Dunford de A est $(A^2, A - A^2)$.

4)a)ii) u et v sont diagonalisables et commutent. $\forall \lambda \in Sp(u), v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

On pose $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v_i = v|_{E_{\lambda_i}(u)}$.

Or, $E = \bigoplus_{i=1}^{i=p} E_{\lambda_i}(u)$.

v est diagonalisable donc tous les v_i sont diagonalisables. Il existe donc des bases B_i des $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $Mat_{B_i}(v_i)$ soit diagonale, formée de vecteurs propres de v_i .

$B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$ est une base de E par (*).

$Mat_B(u) =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et $Mat_B(v) =$

$$\begin{pmatrix} Mat_{B_1}(v_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Mat_{B_2}(v_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Mat_{B_p}B(v_p) \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $Mat_{B_i}(v_i)$ est diagonale donc finalement $Mat_B(v)$ est diagonale.

5) A =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = X^2 + 1$. Si A admet une décomposition de Dunford, alors $\chi_A = \chi_D$. Or, D est diagonalisable donc χ_D est scindé, ce qui est donc impossible.

1.2 Exercice n°2

1) Voir cours