DS7

Ex 1.

1) Si N est une norme. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0,1]$ alors $N(\lambda x + (1-\lambda)y) = |\lambda| N(x)$
$+ |1-\lambda| N(y) \leq |\lambda| + |1-\lambda| = \lambda + 1 - \lambda = 1$ donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$.

2)a) On note $\lambda = \dfrac{N(x)}{N(x)+N(y)} \in [0,1]$ donc $1-\lambda = \dfrac{N(y)}{N(x)+N(y)}$

$N\left(\dfrac{x}{N(x)}\right) = \dfrac{N(x)}{N(x)} = 1$ par le 2ᵉ point donc $\dfrac{x}{N(x)} \in B$. De même, $\dfrac{y}{N(y)} \in B$

B est convexe donc $\lambda \dfrac{x}{N(x)} + (1-\lambda)\dfrac{y}{N(y)} \in B$.

b) On note $\alpha = \dfrac{1}{N(x)+N(y)}$ alors on a montré que $\alpha(x+y) \in B$

c'est à dire $N(\alpha(x+y)) \leq 1$ et par le 2ᵉ point, on a donc $N(x+y) \leq \dfrac{1}{\alpha} = N(x) + N(y)$.

L'inégalité triangulaire est vérifiée donc N est une norme.

Et l'inégalité triangulaire est aussi vraie si x ou y est égal à 0

Ex 2.

Dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1). Soit $x \in p_1(O)$ donc $x = p_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $y \in \mathbb{R}$

O est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, r\right) \subset O$

On considère la boule pour $\|\cdot\|_\infty$.

Donc $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{boule pour la norme } |\cdot|}}{B(x, r)} \subset p_1(O)$: en effet, soit $z \in B(x, r)$

alors $z = p_1\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ et $\left\|\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = |z - x| \leq r$ donc $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in O$

Ainsi $z \in p_1(O)$.

- De même, soit $y \in p_2(O)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = p_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

O est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B_\infty\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, r\right) \subset O$.

$B_{|\cdot|}(y, r) \subset p_2(O)$: En effet, soit $z \in B(y, r)$ alors $z = p_2\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in O$ car $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right\|_\infty = |y - z| \leq r$ donc $z \in p_2(O)$.

2) Soit $(a_n) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ une suite de H telle que $a_n \longrightarrow a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = 1$ et $x_n \to x$, $y_n \longrightarrow y$

Donc par limite $xy = 1$ ainsi $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$.

Par caractérisation séquentielle, H est fermé. (*) suite à la fin !

3) Soit (x_n) une suite de $p_1(F)$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$

Il existe $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in F$ telle que $x_n = p_1\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Par théorème de Bolzano-Weierstrass, $(y_n) \in p_2(F)^{\mathbb{N}}$ donc (y_n) est bornée

et il existe $y_{\varphi(n)}$ convergente (vers y)

On a donc $\begin{pmatrix} x_{\varphi(n)} \\ y_{\varphi(n)} \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} x_{\varphi(n)} \\ y_{\varphi(n)} \end{pmatrix}$ est une suite de F qui est fermé donc par caractérisation séquentielle, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F$.

$x = p_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in p_1(F)$.

Par caractérisation séquentielle, $p_1(F)$ est fermé.

Ex 3.

Partie 1.

1) • $A \subset \mathbb{R}$ et A est borné donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [a,b]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ alors P est continue, par le théorème des bornes atteintes, comme $[a,b]$ est un ensemble fermé et borné de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ de dimension finie, P est bornée et atteint ses bornes.

P est bornée sur $[a,b]$ donc bornée sur A.

• Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. * $\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \geq 0$ donc $\|P\|_A \geq 0$.

* $\|\lambda P\|_A = \sup_{x \in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \sup_{x \in A} |P(x)|$ En effet, $\forall x \in A$, $|\lambda P(x)| = |\lambda| |P(x)| \leq |\lambda| \|P\|_A$

donc $|\lambda| \|P\|_A$ est un majorant de $\{ |\lambda P(x)|, x \in A \}$ donc $\|\lambda P\|_A \leq |\lambda| \|P\|_A$.

Si $\lambda = 0$, $\|\lambda P\|_A = \|0\|_A = 0$ (voir suite !) et $|\lambda| \|P\|_A = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, $\frac{|\lambda P(x)|}{|\lambda|} \leq \frac{\|\lambda P\|_A}{|\lambda|}$ pour tout $x \in A$ donc $|P(x)| \leq \frac{\|\lambda P\|_A}{|\lambda|}$

Par définition du sup. $\|P\|_A \leq \frac{\|\lambda P\|_A}{|\lambda|}$ ainsi $|\lambda| . \|P\|_A \leq \|\lambda P\|_A$.

* $\forall x \in A$, $|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$

donc $\|P\|_A + \|Q\|_A$ est un majorant de $\{|P(x) + Q(x)|, x \in A\}$ ainsi $\|P+Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$

* $\|P\|_A = 0 \iff \forall x \in A, |P(x)| = 0 \iff |P| = 0 \iff P = 0$.

car $|P|$ a une infinité de racines.

2) • Si A est fini, on note $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ on note $P(X) = \prod_{i=1}^{n} X - a_i$

alors $\|P\|_A = 0$ car $P(a_i) = 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ mais $P \neq 0$.

• Si A n'est pas borné, il est soit non minoré soit non majoré.

Il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$ on pose $P(X) = X$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|P\|_A \geq |P(a_n)| = |a_n|$

donc $\|P\|_A \notin \mathbb{R}$.

3) Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \bar{A}$ Par caractérisation séquentielle, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ Comme P est continue, $P(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(a)$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, $|P(a_n) - P(a)| \leq \varepsilon$

et ainsi, $|P(a)| \leq |P(a) - P(a_N)| + |P(a_N)| \leq \varepsilon + \|P\|_A$

4) Comme $A \subset \bar{A}$, $\forall a \in A$, $|P(a)| \leq \|P\|_{\bar{A}}$ donc $\|P\|_A \leq \|P\|_{\bar{A}}$

Et par la question précédente, $\varepsilon + \|P\|_A$ est un majorant de $\{|P(a)|, a \in \bar{A}\}$

donc $\|P\|_{\bar{A}} \leq \varepsilon + \|P\|_A$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

Par limite, $\varepsilon \to 0$, $\|P\|_{\bar{A}} \leq \|P\|_A$.

5) Soit $x \in \bar{A}$ alors il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

or il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$ donc par limite $|x| \leq M$
(par continuité de valeur absolue)

6) $\bar{A}$ est fermé et borné et inclus dans $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie donc par le théorème des bornes atteintes, comme P est continue, il est borné et atteint ses bornes

Partie 2

1) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $|\delta_x(P) - \delta_x(Q)| = |P(x) - Q(x)| = |(P-Q)(x)|$

$$\leq \|P-Q\|_{\bar{A}} = \|P-Q\|_A$$

δ_x est 1-lipschitzienne donc est continue.

2) a) • Par hypothèse, A est borné par un certain $C \in \mathbb{R}_+^*$

donc $\forall a \in A$, $|x-a| \leq |x| + |a| \leq |x| + C < |x| + C + 1$

On pose $M = |x| + C + 1$.

• $x \notin \bar{A}$ donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\underset{o}{B}(x,r) \cap A = \emptyset$

$\forall a \in A$ on a donc $a \notin \underset{o}{B}(x,r)$, c'est à dire $|x-a| \geqslant r$.

b) $\forall a \in A$, $\dfrac{r}{M} \leq \dfrac{|x-a|}{M} < 1$ donc $1 - \dfrac{r^2}{M^2} \geqslant 1 - \left(\dfrac{x-a}{M}\right)^2 > 0$

Et $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $0 \leq P_n(a) \leq \left(1 - \left(\dfrac{r}{M}\right)^2\right)^n$

Par définition du sup, $\|P_n - 0\|_A \leq \left(1 - \left(\dfrac{r}{M}\right)^2\right)^n$

Or $\left|1 - \left(\dfrac{r}{M}\right)^2\right| < 1$ donc par comparaison, $\|P_n\|_A \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

c) $|\delta_x(P_n) - \delta_x(0)| = |P_n(x)| = 1$.

$P_n \xrightarrow[n \to +\infty, \|\cdot\|_A]{} 0$ mais $\delta_x(P_n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} \delta_x(0) = 0$

donc δ_x n'est pas continue.

(*) Suite ex 2

2) $p_1(H) = \{p_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in H\} = \{x, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in H\} = \mathbb{R}^*$

De même $p_2(H) = \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^*$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$0 \notin \mathbb{R}^*$ donc par caractérisation séquentielle des fermés.