DS8

Ex 1.

1) Voir cours

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : t \mapsto \frac{t^n}{n}$ alors $\|P_n\| = \frac{1}{n}$

donc $P_n \xrightarrow[n \to +\infty, \|.\|]{} \tilde{0}$

Et $f(P_n) = t^{n-1}$ donc $\|f(P_n)\| = 1 \not\to 0$

donc $f(P_n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} \tilde{0} = f(\tilde{0})$

f n'est pas continue en 0 et f est linéaire : Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ par linéarité de la dérivée.

Finalement, f n'est pas continue sur E.

3) Voir TD

4) a) on pose $h = f - g$ h est positive donc $\phi(h) \geq 0$

Par linéarité, $\phi(h) = \phi(f) - \phi(g)$.

b) Soit $f \in E \setminus \{0\}$ f est continue sur un segment donc bornée

on note $g : x \mapsto \|f\|_\infty$ alors $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq g(x)$

Par la question précédente, $\phi(|f|) \leq \phi(g)$

Et comme $-|f| \leq f \leq |f|$, par la question précédente et par linéarité de ϕ, on a aussi $-\phi(|f|) = \phi(-|f|) \leq \phi(f) \leq \phi(|f|)$ c'est à dire $|\phi(f)| \leq \phi(|f|)$

Or $\phi(g) = \phi(\|f\|_\infty \tilde{1}) = \|f\|_\infty \phi(\tilde{1})$

Ainsi $\phi(\tilde{1})$ est un majorant de $\left\{ \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty}, f \in E \setminus \{0\} \right\}$

donc $|||\phi||| \leq \phi(\tilde{1})$

Par propriété du cours, ϕ est continue.

Pour $f = \tilde{1}$, $\|f\|_\infty = 1$ et $\frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty} = |\phi(\tilde{1})| = \phi(\tilde{1})$ par positivité

Ainsi $|||\phi||| \geq \phi(\tilde{1})$. Par double inégalité, $|||\phi||| = \phi(\tilde{1})$.

DS 8.

Ex 2.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, par inégalité triangulaire $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$\|m_k - x\| \leq \|m_k - y\| + \|y - x\| \leq r(y) + \|y - x\|$

Donc $r(x) \leq r(y) + \|y - x\|$ autrement dit $r(x) - r(y) \leq \|y - x\|$

De même, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|m_k - y\| \leq \|m_k - x\| + \|y - x\| \leq r(x) + \|y - x\|$

Donc $r(y) \leq r(x) + \|y - x\|$.

Finalement, $|r(x) - r(y)| \leq \|y - x\|$.

2) a) Par inégalité triangulaire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|x\| \leq \|x - m_k\| + \|m_k\| \leq r(x) + r(0)$

b) On pose $\alpha = 2r(0) \geq 0$ Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| \geq \alpha$ alors

$r(x) \geq \|x\| - r(0) \geq 2r(0) - r(0) = r(0)$.

c) r est 1-Lipschitzienne donc continue sur $B_f(0, \alpha)$ qui est fermé et borné donc par le théorème des bornes atteintes, r admet un minimum sur $B_f(0, \alpha)$.

d) Soit $x \notin B_f(0, \alpha)$ donc $\|x\| > \alpha$ et par la question b, $r(x) \geq r(0)$

$0 \in B_f(0, \alpha)$ donc $r(0) \geq r(\omega)$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $r(x) \geq r(\omega)$ donc $r(\omega)$ est le minimum de r sur $\mathbb{R}^2$.

e) • $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|\omega - m_k\| \leq r(\omega)$ par définition de r donc $m_k \in B_f(\omega, r(\omega))$

• Soit $B_f(\omega, c)$ contenant K alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|m_k - \omega\| \leq c$

c est un majorant de $\{\|m_k - \omega\|, 1 \leq k \leq n\}$ donc $r(\omega) \leq c$.

3) a) $D \neq \emptyset$ par la question précédente, $r(\omega) \in D$

$D \subset \mathbb{R}^-$ et D est minoré (par 0) donc par le théorème de la borne inférieure, R est bien défini.

b) $r_n > R$ donc r_n n'est pas un minorant de D, il existe donc $y_n \in D$ tel que $R \leq y_n < r_n$

$y_n \in D$ donc il existe $x_n \in \mathbb{R}^2$ tel que $K \subset B_f(x_n, y_n)$

et $B_f(x_n, y_n) \subset B_f(x_n, r_n)$ car $y_n < r_n$.

c) Par inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!]$

$$\|x_n\| \leq \|x_n - m_k\| + \|m_k\|$$

Par définition de r, $\|m_k\| \leq r(0)$ et $K \subset B_f(x_n, r_n)$ donc $m_k \in B_f(x_n, r_n)$

Donc $\|x_n - m_k\| \leq r_n = R + \frac{1}{n} \leq 1 + R$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|x_n - m_k\| \leq r_n$

Soit $(x_{\varphi(n)})$ la sous-suite convergeant vers x

La norme est une application continue donc $\|x_{\varphi(n)} - m_k\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|x - m_k\|$

Donc $\|x - m_k\| \leq R$ par limite, c.à.d $m_k \in B_f(a, R)$

e) • On vient de montrer que $K \subset B_f(x, R)$

• Par définition de R, $B_f(x, R)$ est la boule fermée de rayon minimal contenant K.

4) a) i) La norme utilisée est une norme euclidienne

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v) + \|u\|^2 +$
$\|v\|^2 - 2(u|v) = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

ii) $\|m_k - \frac{x+y}{2}\|^2 = \|\frac{1}{2}(m_k - x) + \frac{1}{2}(m_k - y)\|^2 = \frac{1}{4}\|\underbrace{m_k - x}_{u} + \underbrace{m_k - y}_{v}\|^2$

$= \frac{1}{4}\left(2\|m_k - x\|^2 + 2\|m_k - y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$ par question précédente.

4) b) Par l'égalité précédente, et comme $m_k \in Bf(x, R)$ alors $\|m_k - x\|^2 \leq R^2$

$m_k \in Bf(y, R)$ alors $\|m_k - y\|^2 \leq R^2$

On a donc $\|m_k - \frac{x+y}{2}\|^2 \leq R^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$.

c) Si $x \neq y$ alors $\|x-y\| > 0$ et donc $\|m_k - \frac{x+y}{2}\| \leq R'$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$

donc $K \subset Bf\left(\frac{x+y}{2}, R'\right)$ avec $R' = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2} < R$

Contredit la minimalité de R.

5) • $Bf\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 3\right)$: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| = 1 \leq 3$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} \leq 3$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} \leq 3$.

• $Bf\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, 2\right)$: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\| = 1 \leq 2$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = 0 \leq 2$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4} = 2 \leq 2$.