DS9

Ex 1

1) Soit $x \in E$, $(f(x)|x) \underset{f \in O(E)}{=} (f^2(x) | f(x)) \underset{f^2=-Id}{=} (-x | f(x)) = -(f(x)|x)$

donc $(f(x)|x) = 0$

2) a) b) $(f(x+y) | x+y) = (f(x) + f(y) | x+y) = (f(x)|x) + (f(x)|y) + (f(y)|x)$
$+ (f(y)|y) \underset{\text{par (iii)}}{=} (f(x)|y) + (f(y)|x) \underset{f \in O(E)}{=} (f^2(x) | f(y)) + (x | f(y))$
$= (f^2(x) + x | f(y))$

Et par (iii), $(f(x+y)|x+y) = 0$ donc $f^2(x) + x \perp f(y)$ $\forall y \in E$

c'est à dire, $f^2(x) + x \in f(E)^\perp$ $f \in O(E)$ donc f est bijective

(car endomorphisme et injective : $f(z) = 0 \Rightarrow \|f(z)\| = 0 = \|z\| \Rightarrow z = 0$)

Donc $f(E)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Ainsi $f^2(x) = -x$

3) Soit $x \in E$, $\|f(x)\|^2 - \|x\|^2 = (f(x) + x | f(x) - x)$ par (iii)

$\underset{\text{par (i)}}{=} (f(x) - f^2(x) | f(x) - x) = (f(x - f(x)) | f(x) - x)$

$= -(f(x - f(x)) | x - f(x)) = 0$ donc $f \in O(E)$.

Ex 2.

1) Cf TD1 ex 8

2) Cf TD1 ex 11

3) On note $r = rg(u_1, \dots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs, on suppose que $(u_1, \dots, u_r)$ est libre.

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, on pose $f(u_i) = v_i$.

3) a) $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension p. Soit $(u_{p+1}, \dots, u_n)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$. Ainsi $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

$(u_1, \dots, u_p)$ est libre donc $M_{(u_1, \dots, u_p)}$ est inversible donc $(v_1, \dots, v_p)$ est libre aussi (question précédente). Soit $(v_{p+1}, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p))^\perp$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $(u_i | u_j) = (v_i | v_j)$. En effet,

* si $i, j \in [\![1, p]\!]$, $(u_i | u_j) = (v_i | v_j)$ car $(M_{u_1, \dots, u_p})_{i,j} = (M_{v_1, \dots, v_p})_{i,j}$
* Si $i, j \in [\![p+1, n]\!]$, $(u_i | u_j) = (v_i | v_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

puisque $(u_{p+1}, \dots, u_n)$ et $(v_{p+1}, \dots, v_n)$ est orthonormée.

* Si $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![p+1, n]\!]$, $(u_i | u_j) = (v_i | v_j) = 0$

car $u_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, $u_j \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$
$v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, $v_j \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)^\perp$.

* De même si $j \in [\![1, p]\!]$ et $i \in [\![p+1, n]\!]$

On pose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j v_j$

Donc $(x|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (u_i | u_j)$

et $(f(x)|f(y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (f(u_i)|f(u_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (v_i | v_j)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (u_i | u_j)$

$= (x|y)$

f conserve le produit scalaire donc $f \in O(E)$

b) $f \in O(E)$ donc f est injective $\left(\text{Soit } x \in E,\ x \in \ker(f) \Rightarrow \|f(x)\| = \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \right)$

L'image d'une famille libre par une application injective est libre.

c)

Ex 3

1)a) $(e_0, \dots, e_N) = (1, X, \dots, X^N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, par le procédé de Gram-Schmidt, on peut construire $(k_0, \dots, k_N)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$: on pose $k_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|} = 1$ puis pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$,

$$g_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=0}^{i} (e_{i+1} | k_k) k_k \quad \text{et} \quad k_{i+1} = \frac{g_{i+1}}{\|g_{i+1}\|}$$

k_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est $1 > 0$.

$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, e_{i+1} est de degré $i+1$ et $\forall k \in [\![0, i]\!]$, comme $\text{Vect}(k_0, \dots, k_k) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_k)$ alors $\sum_{k=0}^{i} (e_{i+1} | k_k) k_k$ est de degré inférieur ou égal à i. Ainsi k_{i+1} est de degré $i+1$ et son coefficient dominant est celui de $\frac{e_{i+1}}{\|g_{i+1}\|} = \frac{1}{\|g_{i+1}\|} > 0$.

$\text{Vect}(e_0, \dots, e_N) = \text{Vect}(k_0, \dots, k_N)$ donc $(k_0, \dots, k_N)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$.

b) On a vu que $k_0 = 1$

$g_1 = X - (X | k_0) k_0 = X - \frac{1}{2}$ $\quad \|g_1\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12}$

Donc $k_1 = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2})$

$g_2 = X^2 - (X^2 | k_1) k_1 - (X^2 | k_0) k_0 = X^2 - 12 (X^2 | X - \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}$

$= X^2 - X + \frac{1}{6}$ $\quad \|g_2\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6} =$

Donc $k_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$

c) On suppose (k_n) et (Q_n) vérifiant les 2 conditions. Par récurrence forte sur n :

P_n : $Q_n = k_n$.

- Q_0 et k_0 sont de degré 0 (donc constants), de norme 1 (constante $= \pm 1$) et de coefficient dominant positif donc $Q_0 = k_0 = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \leq n$, $Q_k = k_k$.

Donc $\text{Vect}(Q_0, \dots, Q_n) = \text{Vect}(k_0, \dots, k_n)$ donc $\text{Vect}(Q_0, \dots, Q_n)^\perp = \text{Vect}(k_0, \dots, k_n)^\perp$

$(\varphi_0, \dots, \varphi_{n+1})$ et $(k_0, \dots, k_{n+1})$ forment des familles orthonormales donc

$\varphi_{n+1}, k_{n+1} \in \text{Vect}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)^\perp = \text{Vect}(k_0, \dots, k_n)^\perp$

(En notant l'orthogonal sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$)

$\dim(\text{Vect}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)^\perp) = 1$ ainsi $\text{Vect}(\varphi_{n+1}) = \text{Vect}(k_{n+1}) = \text{Vect}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)^\perp$

Donc φ_{n+1} et k_{n+1} sont colinéaires.

De plus, ils sont unitaires et de coefficient dominant strictement positif

donc $\varphi_{n+1} = k_{n+1}$.

La propriété est héréditaire.

2) a) $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $(X^{i-1} | X^{j-1}) = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Alors $H_n = M_{(1, \dots, X^{n-1})}$

b) $(1, \dots, X^{n-1})$ est une famille libre donc par l'ex 2, H_n est inversible.

3) $\inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}_n[X]} \|\varphi - f\| = d(f, \mathbb{R}_n[X])$ $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de E, de dimension finie donc par le cours, $d(f, \mathbb{R}_n[X])$ est atteinte en un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc, comme $(1, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $\alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n \in \mathbb{R}$ tels que $P_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i^n X^i$ et $f - P_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$(f - P_n | X^k) = 0 \iff (f | X^k) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i^n (X^i | X^k) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i^n (H_{n+1})_{i+1, j+1}$.

$\iff \begin{pmatrix} (f|1) \\ \vdots \\ (f|X^n) \end{pmatrix} = H_{n+1} \begin{pmatrix} \alpha_0^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$

Donc $\text{Mat}_B(P_n) = \begin{pmatrix} \alpha_0^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} (f|1) \\ \vdots \\ (f|X^n) \end{pmatrix}$

5) $P_1(X) = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 X$ avec $(f|1) = \alpha_0^1 (1|1) + \alpha_1^1 (X|1)$
$(f|X) = \alpha_0^1 (1|X) + \alpha_1^1 (X|X)$
$\iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 \times \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\ln(2)}{2} = \alpha_0^1 \times \dfrac{1}{2} + \alpha_1^1 \times \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Donc $P_1(X) = -\dfrac{\pi}{2} - 3\ln(2) + 6\left(\ln(2) - \dfrac{\pi}{4}\right)X$.