Devoir surveillé 1 - 24/09/24

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante qui converge vers 0. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre T_n, S_n, n, u_{n+1}
   (b) Démontrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge également.
   (c) On suppose que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, nu_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1})$.
   En déduire que $\sum u_n$ converge également.
2. Soit $\sum x_n$ une série à termes positifs qui converge, on note (R_n) la suite de ses restes d'ordre n. Démontrer que les séries $\sum R_n$ et $\sum nx_n$ sont de même nature et en cas de convergence ont la même somme.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^4)^n}$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On note $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \dfrac{4n-3}{4n} I_n$.
3. Montrer que (I_n) converge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $J_n = n^{\frac{3}{4}} I_n$.
   (a) Démontrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement positive.
   (b) Trouver un équivalent simple de $\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n)$
   (c) En déduire la convergence de $\sum \ln(J_{n+1}) - \ln(J_n)$.
5. Montrer que la suite $(\ln(J_n))$ converge et en déduire l'existence d'un réel c strictement positif tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{n^{\frac{3}{4}}}$
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On note pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.
7. En effectuant le changement de variable $v = \ln(1+t^4)$, montrer que $I_n = \dfrac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-(n-1)v}\phi(v)dv$ avec $\phi(v) = (e^v - 1)^{-\frac{1}{4}}$.
8. Soit $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, v \mapsto \phi(v) - v^{-\frac{1}{4}}$. Montrer que ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En déduire que $I_{n+1} = \dfrac{1}{4}\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-nv}}{v^{\frac{1}{4}}}dv + \underset{n\to+\infty}{O}(\dfrac{1}{n})$
   (*On rappelle que* $u_n = O(\dfrac{1}{n})$ *si* (nu_n) *est bornée*)
9. Calculer la constance c de la question 5 en fonction de $\Gamma(\dfrac{3}{4})$