CENTRALE LYON

CapECL2

2024-25

Devoir surveillé 2 - 15/10/24

Exercice 1 : Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel non nul de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$

1. On suppose que pour tout $x \in E, u(x)$ et x sont colinéaires.
   (a) Soient $x, x' \in E\backslash\{0\}$ et a, b deux réels distincts tels que $u(x) = ax, u(x') = bx'$. Démontrer que (x, x') est une famille libre de E.
   (b) Démontrer (par l'absurde) que u est une homothétie (c'est-à-dire égal à λId pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$)
2. Supposons que u commute avec tout endomorphisme de E. Soient $x \in E$, p_x la projection sur $Vect_{\mathbb{R}}(x)$ parallèlement à un supplémentaire de $Vect_{\mathbb{R}}(x)$. Démontrer que $u(p_x(x)) \in Vect_{\mathbb{R}}(x)$ et en déduire que u est une homothétie.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) telle que $Tr(M) = 0$.
   (a) Démontrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ (on pourra différencier les cas selon si M représente une homothétie ou non).
   (b) En déduire que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, ..\lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts avec $n \geq 2$. Démontrer que la somme des $Ker(f - \lambda_i Id)$ pour $i \in [|1, n|]$ est directe.

Exercice 3 : Le but de cet exercice est de déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$ et $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5$

Dans cet exercice, toutes les récurrences "évidentes" pourront ne pas être rédigées.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, déterminer $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ae_1 = e_1$.
3. On suppose que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.
   (b) Quelle autre application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est égale pour des matrices semblables ?
   (c) En déduire les valeurs de a et b.
   (d) Déterminer l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier que A est bien semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
5. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n$.