Devoir surveillé 3 - 19/11/24

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : pour tous $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$

1. (a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note U sa somme.
   (b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*, \sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
   (c) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la primitive de u_n qui s'annule en 0.
   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par : pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, v_n(x) = \ln(1+\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$. Démontrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note V sa somme.
   (c) Montrer que V est la primitive de U qui s'annule en 0.
3. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2})$. Montrer que (p_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on exprimera à l'aide de V .

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.

Exercice 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) qui converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a,b], (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(x_n)$.
2. Démontrer que $(\|f_n\|_{\infty,[a,b]})$ est décroissante.
3. Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 4 :

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, donner la définition de son rayon de convergence.
2. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On note R et R' les rayons de convergences respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum \dfrac{1}{a_n} z^n$.
   Démontrer que $RR' \leq 1$ (*On pourra démontrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$ *si* $|z| < R$ *alors* $|z| < \dfrac{1}{R'}$)
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.