CENTRALE LYON

CapECL2

2024-25

Devoir surveillé 4 - 10/12/24

4 /15 **Exercice 1 :** On note $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

1. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n(t) = -\dfrac{t^{n-1}\ln(t)}{n}$ pour tout $t \in]0,1]$.
   Calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Démontrer que $R_n \leq \dfrac{1}{2n^2}$

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{23} \frac{1}{n^3} \approx 1,20115$ est une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

8 /18 **Exercice 2 :** On effectue une infinité de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{2}{3}$.

On note :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, F_n$ l'évènement "on obtient Face au n-ième lancer".
- Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on dit qu'il y a apparition d'un Double Pile au rang n si on obtient Pile aux $(n-1)$-ème et n-ème lancers.
  On note D_n : "on obtient un Double pile pour la première fois au rang n"
  $v_n = \mathbb{P}(D_n)$ et par convention, $v_1 = 0$

1. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que $v_3 = \dfrac{1}{3}v_2 + \dfrac{2}{9}v_1$.
2. Soit $n \geq 2$, démontrer que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(D_{n+2} \cap F_2) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2)\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap F_2}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3}v_n$.
3. Soit $n \geq 2$, démontrer que $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}v_{n+1} + \dfrac{2}{9}v_n$.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de $\mathbb{P}(D_n)$ en fonction de n.
5. Pour tout $n \geq 2$, on note E_n : " il n'y a pas eu deux Piles consécutifs au cours des n premiers lancers". Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
6. En déduire la probabilité de ne jamais obtenir de Double Pile.

3.5

3.45 14 **Exercice 3 :** Soit une urne contenant une proportion p (avec $p \in]0,1[$) de boules noires et $q = 1-p$ de boules blanches. On effectue un tirage successif et de manière indépendante d'une boule avec remise et on considère X_r le rang d'apparition de la r-ième boule noire (avec $r \in \mathbb{N}^*$).
On note Ω l'univers de l'expérience, à savoir le résultat des tirages.

0.75 /4 en ANAL — 2.75 /3 + /13 en proba

1. (a) Donner $X_r(\Omega)$.

   (b) Justifier que pour tout $k \in X_r(\Omega), \mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$.
2. Montrer que pour tous $x \in]-1,1[, r \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=r-1}^{+\infty} \binom{k}{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.
3. Déterminer l'espérance de X_r.