

Devoir surveillé 4 - 10/12/24



4 15

Exercice 1 : On note $f : t \mapsto \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ et $I = \int_0^1 f(t) dt$

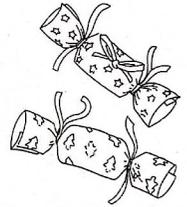
1. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n(t) = -\frac{t^{n-1} \ln(t)}{n}$ pour tout $t \in]0, 1]$.

Calculer $\int_0^1 u_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Démontrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Démontrer que $R_n \leq \frac{1}{2n^2}$

(b) En déduire que $\sum_{n=1}^{23} \frac{1}{n^3} \approx 1,20115$ est une valeur approchée de I à 10^{-3} près.



8 18

Exercice 2 : On effectue une infinité de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{2}{3}$.

On note :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'évènement "on obtient Face au n -ième lancer".
- Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on dit qu'il y a apparition d'un Double Pile au rang n si on obtient Pile aux $(n-1)$ -ème et n -ème lancers.

On note D_n : "on obtient un Double pile pour la première fois au rang n "
 $v_n = \mathbb{P}(D_n)$ et par convention, $v_1 = 0$

1. Calculer v_2 et v_3 . Vérifier que $v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1$.

2. Soit $n \geq 2$, démontrer que $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = \mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2} \cap F_2) = \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n$.

3. Soit $n \geq 2$, démontrer que $v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n$.

4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de $\mathbb{P}(D_n)$ en fonction de n .

5. Pour tout $n \geq 2$, on note E_n : "il n'y a pas eu deux Piles consécutifs au cours des n premiers lancers". Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.

6. En déduire la probabilité de ne jamais obtenir de Double Pile.

5.5

3.5 14

Exercice 3 : Soit une urne contenant une proportion p (avec $p \in]0, 1[$) de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue un tirage successif et de manière indépendante d'une boule avec remise et on considère X_r le rang d'apparition de la r -ième boule noire (avec $r \in \mathbb{N}^*$).

On note Ω l'univers de l'expérience, à savoir le résultat des tirages.

1. (a) Donner $X_r(\Omega)$.

(b) Justifier que pour tout $k \in X_r(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.

2. Montrer que pour tous $x \in]-1, 1[$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=r-1}^{+\infty} \binom{k}{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.

3. Déterminer l'espérance de X_r .



0.5 11
 2.75
 + 13
 en ANAL en proba