Devoir surveillé 6 - 04/02/25

Exercice 1 : On admet le théorème suivant : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe un unique couple $(D, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que

- $A = D + N$
- D est **diagonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- N est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}, N^k = 0$, on définit l'indice de nilpotente $\min\{k \in \mathbb{N}, N^k = 0\}$)
- $DN = ND$

Ce qui implique que D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford en A.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer D diagonale et P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. 2
   (b) Déterminer la décomposition de Dunford de A. 0.5
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer son polynôme caractéristique χ_A. 0.5
   (b) Donner la décomposition de Dunford de A. 1.5
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
   (a) Démontrer que $X(X-1)$ est annulateur de A^2. 0.5
   (b) Démontrer que la décomposition de Dunford de A est $(A^2, A - A^2)$ 1.5
4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
   (a) i. Démontrer que tout sous espace propre de u est stable par v. On note v_i l'endomorphisme v induit sur $E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $\lambda_i \in Sp(u)$. 1
   ii. En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v. 2
   (b) Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que $A - B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. 1
   (c) Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui commutent et dont les indices de nilpotence sont p et q. Démontrer que $A - B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p + q - 1$. 1.5
   (d) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes. 1.5
   (e) Démontrer l'unicité de la décomposition de Dunford. 1
5. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford. 1.5

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$
Une version du théorème appelé "Lemme des noyaux" est admis :
Soient $P_1, ..., P_p \in \mathbb{R}[X]$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) des polynômes de degré 1 sans racine commune alors
$Ker((P_1 \times ... \times P_p)(f)) = Ker(P_1(f)) \bigoplus Ker(P_2(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker((P_p(f)).$

1. Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples, démontrer que les sous espaces propres de ~~F~~ f sont supplémentaires de E. 2
2. On suppose dans cette question que $(f - Id)(f + Id) = 0$
   (a) On note $R_1(X) = X - 1, R_2(X) = X + 1$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $aR_1 + bR_2 = 1$ 0.5
   (b) On note $K_1 = Ker(R_1(f))$ et $K_2 = Ker(R_2(f))$ et p_1 la projection sur K_1 de direction K_2 et p_2 la projection sur K_2 de direction K_1. Démontrer que $p_1 = bR_2(f)$ et $p_2 = aR_1(f)$ 1.5
   (c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k \circ p_1 = p_1$ et $f^k \circ p_2 = (-1)^k p_2$ 1.5
   (d) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k = (b + (-1)^k a)f + (b - (-1)^k a)Id$ 1.5