Moyenne : 8.4
Médiane : 7.5
Écart-type : 4.6

CENTRALE LYON

CapECL2
2024-25

C.BOURNE

Devoir surveillé 7 - 25/02/25

Dans tout le sujet on admettra le théorème de Bolzano-Weierstrass : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée de E admet une sous-suite convergente.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

On note $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$

1. Montrer que si N est une norme alors B est convexe. 0.75
2. On suppose que B est convexe.
   (a) Montrer que pour tous $x, y \in E\setminus\{0_E\}$, $\dfrac{N(x)}{N(x)+N(y)}\dfrac{x}{N(x)} + \dfrac{N(y)}{N(x)+N(y)}\dfrac{y}{N(y)} \in B$. 0.75
   (b) En déduire que N est une norme. 1

Exercice 2 : Soient p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $p_i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_i$ pour $i \in \{1, 2\}$

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. 2
2. Soit $H = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, xy = 1\right\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$. 2
3. Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_2(F)$ est une partie bornée alors $p_1(F)$ est fermée. 1.5

Exercice 3 : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\|_A = \sup\limits_{x\in A}|P(x)|$

Partie 1

1. Montrer que si A est infini et borné alors $\|.\|_A$ est bien définie et est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. 2
2. Montrer que si A n'est pas infini ou n'est pas borné alors $\|.\|_A$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}[X]$. 1.5
   On supposera dans le reste de l'exercice que A est infini et borné.
3. Démontrer que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \overline{A}, |P(a)| \leq \epsilon + \|P\|_A$. 1
4. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_A = \|P\|_{\overline{A}}$. 1
5. Démontrer que $\overline{A}$ est aussi borné. 1
6. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_A = \max\limits_{x\in\overline{A}}|P(x)|$. 1

Partie 2

Dans cette partie, on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|.\|_A$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\delta_x : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(x)$

1. Montrer que si $x \in \overline{A}$ alors δ_x est continue sur $\mathbb{R}[X]$. 1
2. Dans cette question, on suppose que $x \notin \overline{A}$ 1.5
   (a) Démontrer qu'il existe $r, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $a \in A, r \leq |x - a| < M$ 1.5
   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{R}, P_n(z) = (1 - (\dfrac{z-x}{r})^2)^n$. Montrer que (P_n) converge vers 0 pour $\|.\|_A$. 1
   (c) En déduire que δ_x n'est pas continue. 1