Devoir surveillé 8 - 25/03/25

Exercice 1 : Soient E, F des espaces vectoriels normés munis des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Question de cours : Démontrer que si E est de dimension finie alors f est continue.
2. Soit $E = F = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ et $f : P \mapsto P'$. Démontrer que f n'est pas continue.
3. On suppose que f est continue sur E, démontrer que $|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ est bien définie et est une norme.
   On l'appelle norme subordonnée à $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.
4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive, c'est-à-dire vérifiant : pour toute fonction $f \in E$ positive, $\phi(f) \geq 0$.
   (a) Démontrer que pour tous $f, g \in E$ telles que pour tout $x \in [0,1], f(x) \geq g(x)$ alors $\phi(f) \geq \phi(g)$.
   (b) Démontrer que ϕ est continue et $|||\phi||| = \phi(\tilde{1})$ en notant la norme subordonnée à la norme infinie.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

On considère $m_1, ..., m_n \in \mathbb{R}^2$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $K = \{m_1, ..., m_n\}$, on souhaite démontrer l'existence et l'unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant K.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $r(x) = \max \{\|m_k - x\|, 1 \leq k \leq n\}$

1. Déterminer deux boules fermées de centre différent contenant $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. Démontrer que $r : x \mapsto r(x)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. /1.5
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq r(0) + r(x)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \geq \alpha \Rightarrow r(x) \geq r(0)$
   (c) Démontrer que r admet un minimum sur $B_f(0, \alpha)$ (avec α de la question précédente) atteint en un point noté w.
   (d) Justifier que $r(w)$ est le minimum de r sur $\mathbb{R}^2$.
   (e) En déduire que $B_f(w, r(w))$ est une boule fermée contenant K et $r(w)$ est le rayon minimal d'une boule fermée de centre w et contenant K.
4. On note $D = \left\{ r \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}^2, K \subset B_f(x, r) \right\}, R = \inf D$.
   (a) Justifier l'existence de R.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = R + \dfrac{1}{n}$, démontrer qu'il existe $x_n \in \mathbb{R}^2$ tel que $K \subset B_f(x_n, r_n)$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \|x_n\| \leq r(0) + R + 1$.
   (d) On admet (théorème de Bolzano-Weierstrass) que (x_n) admet une sous-suite convergente, on note x sa limite. Démontrer que $K \subset B_f(x, R)$
5. (a) i. Démontrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2, \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u - v\|^2$
   ii. En déduire que pour pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2, k \in [|1, n|]$,
   $\|m_k - \dfrac{x+y}{2}\|^2 = \dfrac{1}{2}\|m_k - x\|^2 + \dfrac{1}{2}\|m_k - y\|^2 - \dfrac{1}{4}\|x - y\|^2$
   (b) Supposons que $K \subset B_f(x, R)$ et $K \subset B_f(y, R)$ alors pour tout $k \in [|1, n|]$,
   $\|m_k - \dfrac{x+y}{2}\|^2 \leq R^2 - \dfrac{1}{4}\|x - y\|^2$.
   (c) En déduire l'unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant K.