Devoir surveillé 9 - 15/04/25

Exercice 1 (~3,5) : Soient E un espace euclidien, muni du produit scalaire $(.|.)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$ $\qquad$ (ii) $f^2 = -Id_E$ $\qquad$ (iii) $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$

1. Démontrer que (i) et (ii) impliquent (iii). 11
2. On suppose (i) et (iii) 11.5
   (a) Soient $x, y \in E$, donner une expression de $(f(x+y)|x+y))$ et en déduire que $f^2(x) + x \in (f(E))^{\perp}$.
   (b) En déduire que (i) et (iii) impliquent (ii).
3. On suppose (ii) et (iii) 11
   (a) Soit $x \in E$, exprimer $(f(x) + x|f(x) - x)$ en fonction de $\|f(x)\|^2$ et $\|x\|^2$.
   (b) En déduire que (ii) et (iii) impliquent (i).

Exercice 2 (~7.5) (Pourra être utilisé dans l'exercice 3) : Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(.|.)$. Pour tous $e_1, .., e_n \in E$, on note $M_{e_1,..,e_n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [|1, n|], (M_{e_1,..,e_n})_{i,j} = (e_i|e_j)$

1. On note $\mathcal{B}$ une base de E, soient $x, y \in E$ et $X = Mat_{\mathcal{B}}(x), Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$, démontrer que $(x|y) = X^T M_{\mathcal{B}} Y$. 11.5
2. Soit $(u_1, .., u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$, démontrer que $(u_1, .., u_p)$ est libre si et seulement si $M_{u_1,...,u_p}$ est inversible. 11.5
3. Soient $(u_1, .., u_p)$ une famille libre de vecteurs de E et $(v_1, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E telles que $M_{u_1,..,u_p} = M_{v_1,...,v_p}$. 11.5
   (a) Démontrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que pour tout $i \in [|1, p|], f(u_i) = v_i$. 12.5
   (b) En déduire que $(v_1, ..., v_p)$ est aussi une famille libre. 11

Exercice 3 (~9) : Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$, $\|.\|$ la norme euclidienne associée et $f \in E$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [|1, n|], (H_n)_{i,j} = \dfrac{1}{i + j - 1}$

1. (a) Démontrer qu'il existe une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions : 12
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}, K_n$ est de degré n et son coefficient dominant est strictement positif
   - Pour tout $N \in \mathbb{N}, (K_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base orthonormale de $R_N[X]$.

   (b) Calculer explicitement K_0, K_1 et K_2. 11
   (c) Justifier l'unicité de la famille (K_n). 11.5
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une famille $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour laquelle $H_n = M_{e_1,...,e_n}$ (*Notation exercice 2*). 10.5
   (b) En déduire que H_n est inversible. 10.5
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|P_n - f\| = \min\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$. 10.5
4. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $Mat_{\mathcal{B}}(P_n)$ à l'aide de H_{n+1}^{-1} et de $(f|X^i)$ pour $i \in [|0, n|]$. 11
5. Déterminer explicitement P_1 avec f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in [0, 1]$. 12