Éléments de correction : DS n°10

Q1. $CH_4(g) + 2\,O_2(g) = CO_2(g) + 2\,H_2O(g)$

Q2. L'enthalpie standard de formation de A_i est l'enthalpie standard de réaction formant un A_i à partir d'éléments chacun dans leur état standard de <u>référence</u>. Par exemple pour $CO_2(g)$ cette réaction est $C(gr) + O_2(g) = CO_2(g)$

Q3.

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \xrightarrow{\Delta_r H^\circ} CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \xrightarrow{-\Delta_f H^\circ(CH_4(g))} C(gr) + 2H_2(g) + 2\,O_2(g) \xrightarrow{\Delta_f H^\circ(CO_2(g)) + 2\Delta_f H^\circ(H_2O(g))} CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

Loi de Hess : $\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(CO_2(g)) + 2\Delta_f H^\circ(H_2O(g)) - \Delta_f H^\circ(CH_4(g))$

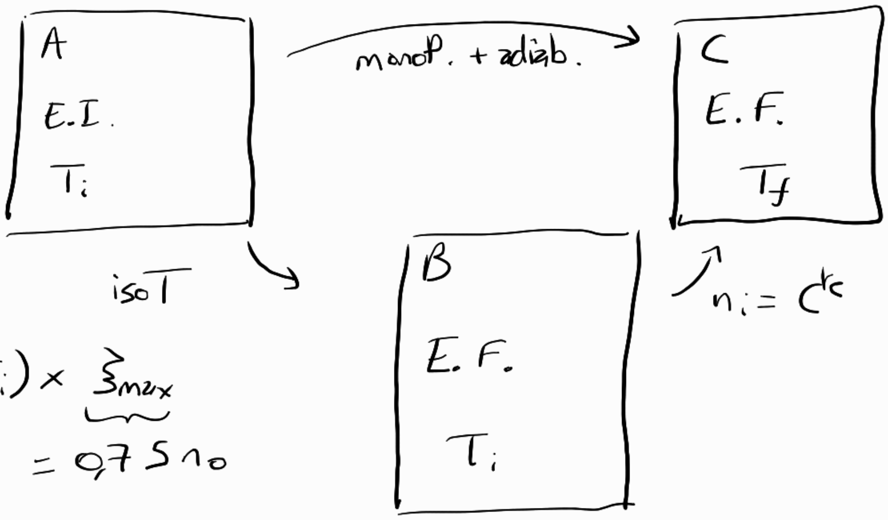
$$\Delta_r H^\circ = -400 - 480 + 75 = -805 \text{ kJ/mol}$$

Q4. $x_{O_2} = 0{,}2$

Q5. Pour calculer T_f, on va utiliser le fait que H est une fonction d'état. On note $n_0 = \dfrac{p^\circ V}{RT}$ où $V = 1\,m^3$, $T = 298\,K$ et $p^\circ = 1$ bar, de sorte à ce que :

	$CH_4(g)$	+ $2O_2(g)$	= $CO_2(g)$	+ $2H_2O(g)$	$N_2(g)$
E.I.	$0{,}75\,n_0$	$2n_0$	0	0	$8n_0$
E.F.	0	$0{,}5\,n_0$	$0{,}75\,n_0$	$1{,}5\,n_0$	$8n_0$

On a $\Delta H_{CA} = 0$ (monoP + adiab.), or



$$H_C - H_A = H_C - H_B + H_B - H_A$$

fct° d'état

avec $H_B - H_A = \Delta_r H^\circ(T_i) \times \underbrace{\xi_{max}}_{= 0{,}75 n_0}$

et $H_C - H_B = n_0 \left(0{,}5\, c_{pO_2} + 0{,}75\, c_{pCO_2} + 1{,}5\, c_{pH_2O} + 8 c_{pN_2} \right) \times (T_f - T_i)$

d'où $$T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ(T_i) \times 0{,}75}{0{,}5\, c_{pO_2} + 0{,}75\, c_{pCO_2} + 1{,}5\, c_{pH_2O} + 8 c_{pN_2}}$$

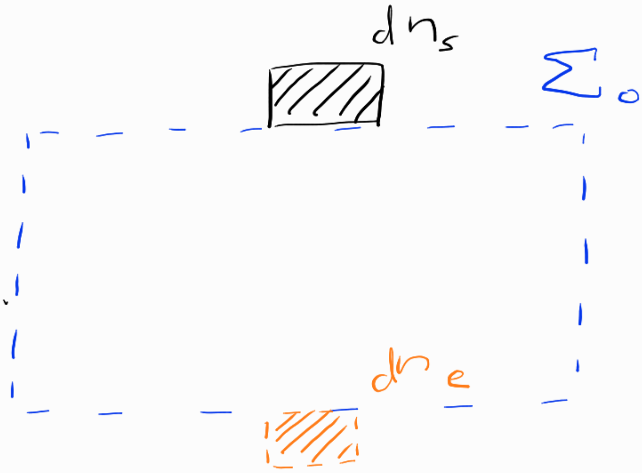
$T_f = 2048\,K$, soit $1775\,°C$

Q6. ~200°C (473 K) est généralement acceptable pour des bisuits, à 2000K on risque clairement, en cuisant ces derniers dans la flamme, d'obtenir la combustion de la croute avant la cuisson du coeur.

Q7. On a $\Delta e_c = 0$ $\Delta e_p = 0$ $w_u = 0$ $q \neq 0$ $\Delta h \neq 0$

c'est donc un échangeur thermique

Q8. La réaction est totale, donc son avancement est maximal.



On a conservat° du

nombre de chacun des éléments chimiques

dans $\begin{cases} \Sigma_f(t) = \Sigma_o(t) \cup \sigma_e \\ \Sigma_f(t+dt) = \Sigma_o(t+dt) \cup \sigma_s \end{cases}$

soit, pour le carbone (par exemple) :

$$n_c(t) = n_{C_o}(t) + dn_{Ce}$$

$$\Sigma_{fermé} \rightarrow n_c(t+dt) = \overset{R.P.}{n_{C_o}}(t+dt) + dn_{cf}$$

d'où $dn_{Ce} = dn_{Cs}$ ou encore

pour C : $dn_{CH_4e} = \underbrace{dn_{CH_4s}}_{=0 \text{ car combustion}} + dn_{CO_2s}$ (a)

complète & O_2 en excès

pour O : $2dn_{O_2e} = 2\underbrace{dn_{O_2s}}_{= dn_{O_2e} - 2dn_{CH_4s}} + dn_{H_2Os}$ (b)

car combustion complète & O_2 en excès

pour N : $dN_{2e} = dN_{2s}$ (c)

pour H : $4dn_{CH_4e} = 4\underbrace{d_{nCH_4s}}_{=0,\text{ vu précédemment}} + 2dn_{H_2Os}$ (d)

La qté de matière totale en gaz est inchangée au cours de la réact°, donc

$dn_{gaz,e} = dn_{gaz,s}$ (e) et $P_e = P_s$ (f) donc

$$P_{CO_2 s} = \frac{dn_{CO_2 s} RT}{dV} \underset{\text{loi de Dalton}}{=} \frac{dn_{CO_2 s}}{dn_{gaz,s}} P_s \underset{(a)(e)(f)}{=} \underbrace{\frac{dn_{CH_4 e}}{dn_{gaz e}} P_e}_{P_{CH_4 e}}$$

$$\Rightarrow P_{CO_2,s} = 0,75 \text{ bar}$$

avec (c) $P_{N_2 s} = 8$ bar

avec (d) $P_{H_2O s} = 2 P_{CH_4,e} = 1,5$ bar

et $\underbrace{P_s}_{10,75 \text{ bar}} = \underbrace{P_{CH_4 s}}_{0} + \underbrace{P_{N_2,s}}_{8 \text{ bar}} + \underbrace{P_{CO_2,s}}_{0,75 \text{ bar}} + \underbrace{P_{H_2O s}}_{1,5 \text{ bar}} + \underbrace{P_{O_2,s}}_{?}$

$$\Rightarrow P_{O_2,s} = 0,5 \text{ bar}$$

Q9. $\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{= \Delta e_m = 0} = q + \underbrace{w_u}_{=0}$

$= 0$, aucune pièce mécanique

$= \Delta e_m = 0$, pas de variation d'énergie mécanique

Q10. Considérons une masse dm du mélange de gaz d'entrée subissant la transformato isoT le menant à l'état final (A→B de la Q5).

$\Delta H = \Delta_r H° \times \xi_{max}$, ici $dH = \Delta_r H° \times d\xi_{max}$

où $d\xi_{max} = dn_{CH_4 e} = x_{CH_4 e} \, dn_e$

et $dm = dm_{CH_4 e} + dm_{N_2 e} + dm_{O_2 e}$

(+ facile à calculer, on pourrait partir de la sortie aussi et avoir strictement le m̂ résultat)

$dm = dn_{CH_4 e} M_{CH_4} + dn_{N_2 e} M_{N_2} + dn_{O_2 e} M_{O_2 e}$

$$dm = \frac{dn_e}{P_e}\left(P_{CH_4} M_{CH_4} + P_{N_2} M_{N_2} + P_{O_2} M_{O_2}\right)$$

et en utilisant $dH = \Delta h \, dm = \Delta_r H^\circ \, d\xi_{max}$ on obtient :

$$\Delta h = \Delta_r H^\circ \frac{P_e \, x_{CH_4 e}}{P_{CH_4} M_{CH_4} + P_{N_2} M_{N_2} + P_{O_2} M_{O_2}}$$

$$\alpha = \frac{P_{CH_4}}{P_{CH_4} M_{CH_4} + P_{N_2} M_{N_2} + P_{O_2} M_{O_2}} = \frac{0,75}{0,75 \times 16 + 8 \times 30 + 2 \times 32} \text{ mol/g}$$

$$\alpha = \underset{\text{si vous voulez vérifier votre A.N.}}{\underline{2,3734}} \times 10^{-3} \text{ mol/g} = 2,4 \text{ mol/kg}$$

Q11. $\Delta h \, D_m = -\mathcal{P}_{th}$ donc $D_m = \dfrac{-\mathcal{P}_{th}}{\alpha \, \Delta_r H^\circ}$

⚠ car $\mathcal{P}_{th}$ compté comme cédé par Σ_f à l'ext

d'où $D_m = \dfrac{4 \times 10^5}{2,4 \times 8,05 \times 10^5} = 0,207 \simeq 0,21 \text{ kg/s}$

et $D_{m\,CH_4} = \dfrac{dm_{CH_4}}{dt} = D_m \times \dfrac{dm_{CH_4}}{dm_e} = D_m \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{dm_{air}}{dm_{CH_4}}}$

$$D_{m\,CH_4} = D_m \times \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{P_{O_2} M_{O_2}}{P_{CH_4} M_{CH_4}} + \frac{P_{N_2} M_{N_2}}{P_{CH_4} M_{CH_4}}}_{= 0,038}} = 8,0 \text{ mg/s}$$

donc un débit molaire $D_{n\,CH_4} = \dfrac{D_{m\,CH_4}}{M_{CH_4}} = D_{n\,CO_2}$

d'où $D_{m\,CO_2} = \dfrac{M_{CO_2}}{M_{CH_4}} D_{m\,CH_4}$

$$D_{m\,CO_2} = \underbrace{\frac{M_{CO_2}}{M_{CH_4}}}_{2,75} \times \underbrace{\frac{1}{1+\dfrac{P_{O_2}M_{O_2}}{P_{CH_4}M_{CH_4}}+\dfrac{P_{N_2}M_{N_2}}{P_{CH_4}M_{CH_4}}}}_{0,038} \times \underbrace{\frac{-\mathcal{P}_{th}}{\alpha\,\Delta_r H^\circ}}_{0,21\ kg/s} = 0,022\ kg/s$$

soit 79 kg de CO_2 émis par heure

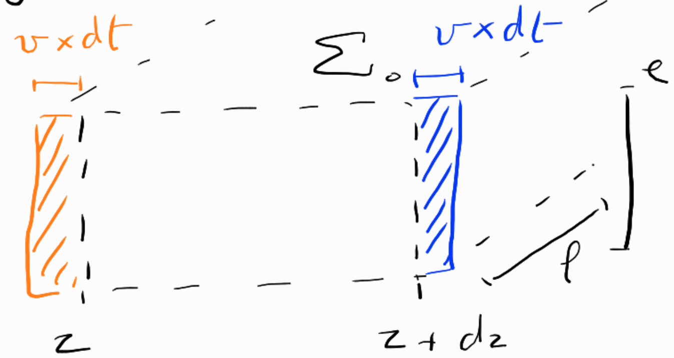
(~20 - 25 voitures roulant en m̂ temps)

Q12. $D_{th} = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ et $\tau_{eau} \sim \dfrac{e^2}{D_{th}} = \dfrac{e^2 \rho_e c_{eau}}{\lambda}$

$\tau_e \sim 3200\ s \simeq 52\ min$

et $\tau_{air} \sim \dfrac{h^2 \rho_{air} c_{air}}{\lambda_{air}} \sim 3000\ s = 50\ min$, c'est nettement trop lent, des biscuits cuisent usuellement en ~ 10 - 15 minutes au four.

Q13.



$$dt \times D_{m_1}(z) = \underbrace{\rho(z) \times \underbrace{\ell e v\, dt}_{d\tau}}_{dm}$$

donc $D_{m_1}(z) = \rho(z)\, \ell e v$

idem : $D_{m_2}(z) = \rho(z+dz)\, \ell e v$

or, par conservation de la masse

$D_{m_1} = D_{m_3}$ d'où $D_{m_3}(z+dz) = \rho(z)\, \ell e v$

Q14. Appliquer le premier principe à Σ_0

dans le référentiel attaché au plafond du four, référentiel supposé galiléen, donne :

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c} + \underbrace{\Delta e_{pp}} = q + \underbrace{w_u}_{=0}$$ → pas de pièce mobile dans la pâte

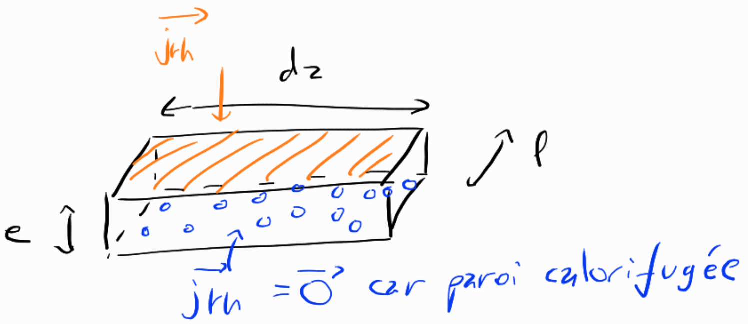
↳ $= 0$, l'effet de la pesanteur est négligé

et $q = \dfrac{\mathcal{P}_{th}}{D_{m_1}}$ or $\mathcal{P}_{th} = - \oiint \overrightarrow{j_{th}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{dS}}$ pris sortant de Σ_1

car $\overrightarrow{dS}$ sortant

or $\mathcal{P}_{th} > 0$ si reçu selon le 1er ppe

$\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(y)\, \overrightarrow{e_y}$ simplifie l'intégrale précédente, sachant $\overrightarrow{j_{th}}(e) = \overrightarrow{0}$,



$\mathcal{P}_{th} = j_{th_0}\, dz\, \ell$ donc

$$\Delta h = \frac{j_{th_0}\, dz\, \ell}{\rho(z)\, \ell e v} = \frac{j_{th_0}\, dz}{\rho(z)\, e v}.$$

Notons $dH_e(z)$ l'enthalpie d'une masse dm de pâte sèche + eau liq. située en z. $dH_e(z) = dH_{sec_e} + dH_{eau_e\ell}(z)$

En sortie de notre système infinitésimal on a

$dH_s = dH_{sec_s} + dH_{eau_s\ell}(z+dz) + dH_{eau\,vap}$ par extensivité.

La masse sèche est constante, comme sa température,

donc $dH_{sec_s} - dH_{sec_e} = dm_s \times c_p\,(\underset{100°C}{T_s} - \underset{100°C}{T_e}) = 0$

seule une masse d'eau dm_{vap} s'est vaporisée,

avec $dm_{vap} = \left(D_{m_3} - D_{m_2}\right)dt = \ell e v\, dt\left(\rho(z) - \rho(z+dz)\right)$

d'où $dH_s - dH_e = h_{vap} \times dm_{vap}$

$$dH_s - dH_e = -h_{vap} \times l\,e\,v\,dr\,\frac{d\rho}{dz}\,dz$$

$$\Delta h = \frac{dH_s - dH_e}{D_{m_1}\,dr} = -\frac{h_{vap}}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\,dz$$ d'où

$$-\frac{h_{vap}}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\,dz = \frac{j_{th_0}\,dz\,l}{\rho\,e\,l\,v}$$ soit

$$-h_{vap}\,\rho_1\,\frac{dr}{dz} = \frac{j_{th_0}}{e v}$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{j_{th_0}}{e v \rho_1 h_{vap}} = -\frac{1}{\delta} \qquad \frac{\cancel{kg}\,s^{-3}}{m^2\,s^{-1}\,\cancel{kg}\,m^{-3}\,m^2\,\cancel{s^{-2}}}$$

Q15. $\rho(L) = \rho_0 + r(L)\,\rho_1 = \rho''$

$\rho(0) = \rho_0 + r(0)\,\rho_1 = \rho'$

or $r(L) = 0{,}05$ et $r(0) = 0{,}2$ d'après l'énoncé, donc

$$\begin{cases} \rho_0 + 0{,}05\,\rho_1 = \rho'' \\ \rho_0 + 0{,}2\,\rho_1 = \rho' \end{cases}$$ d'où

$$\rho_1 = \frac{\rho' - \rho''}{0{,}15} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \rho'' - \frac{\rho' - \rho''}{3} = \frac{4\rho'' - \rho'}{3}$$

$\rho_1 = 10^3\ kg.m^{-3}$ $\qquad \rho_0 = \dfrac{4{,}2 - 1{,}20}{3} \times 10^3 = 10^3\ kg.m^{-3}$

Q16. D'après la loi de Stefan la puissance surfacique émise par un corps noir est $P_s = \sigma T^4$, soit $P_{s\,four} = \sigma T_{four}^4$ pour le four et $P_{s\,biscuit} = \sigma T_{bis}^4$

pour le biscuit. or $T_{bis} = 100°C = 373\ K$ et

$T_{four} = 700\ K$ d'où $\frac{P_{s\,biscuit}}{P_{s\,four}} = \left(\frac{T_{bis}}{T_{four}}\right)^4 = 0{,}08$

c'est, en première approche, en effet plutôt négligeable.

Q 17. On a $j_{rho} = \frac{\mathcal{P}_{rh}}{L \times \ell}$ d'où

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\mathcal{P}_{rh}}{e v \rho_1 h_{vap} L \times \ell} = \frac{r(L) - r(0)}{L}$$ d'où

$$v = \frac{\mathcal{P}_{rh}}{(r(0) - r(L))\, e \rho_1 h_{vap}\, \ell} = \frac{4 \times 10^5}{0{,}15 \times 0{,}02 \times 10^3 \times 2{,}2 \times 10^6 \times 1}\ m/s$$

$v = 6\ cm/s$, plausible.

ici $\mathcal{P}_{rh}$ est déjà fourni, agrandir L étalerai une puissance $\mathcal{P}_{rh}$ sur une surface plus grande. Dans la vraie vie $L \nearrow$ signifie plus de brûleurs et de consommat° de méthane

Q 18. $r(L) \geq 0 \Rightarrow r(0) - r(L) \leq r(0)$ donc

$\frac{1}{r(0) - r(L)} \geq \frac{1}{r(0)}$ d'où $v \geq \frac{\mathcal{P}_{rh}}{e \rho_1 h_{vap}\, \ell \times r(0)}$

$v \geq 4{,}5\ cm/s.$