Éléments de correction : DS n°2 :

Problème 1 : Q1. $f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}$ où le signal temporel est de la forme

$s(t) \propto \cos(\varphi(t))$ ou sin, c'est équivalent à $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ près, $\pm\frac{\pi}{2}$ étant une c^{te} ne modifiant

donc pas f_i. pour $e(t)$, $\varphi(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi\alpha\cos(2\pi f t)$, $f_i = f_0 - 2\pi f\alpha\sin(2\pi f t)$

Q2. $w(t) = e(t) \times a(t) = E_0\cos(2\pi f_m t) \times A\cos(2\pi f_0 t) \times k$

une constante, en V^{-1}. pas grave si oubliée, on raisonne sur $w\,\alpha$.

et $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\frac{w(t)}{2AE_0k} = \cos(2\pi(f_m+f_0)t) + \cos(2\pi(f_m-f_0)t)$$

$$= \underbrace{\cos(2\pi(f_m+f_0)t)}_{H.F.\ (f_0 \gg 2\pi\alpha f)} + \underbrace{\cos(2\pi\alpha\cos(2\pi f t))}_{B.F.}$$

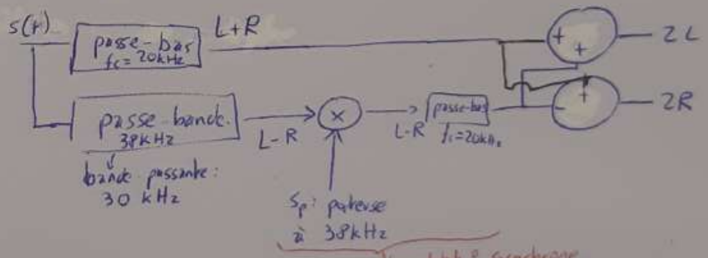
Q3. On prend pour "?" un passe-bas de fréquence de coupure $< f_0$ et $> f \times 2\pi\alpha$. Pour $\underbrace{2\pi\alpha \ll 1}_{\text{non explicité, on regarde juste ce que ça donne}}$, alors $\cos(2\pi\alpha\cos(2\pi f t)) = 1 - \frac{(2\pi\alpha\cos(2\pi f t))^2}{2}$

terme à $2f$; terme c^{te}

un passe-bande de bande passante $]0; f']$ où $f < f' < f_0$ est aussi acceptable.

Q4. On pourrait recombiner $L+R + L-R = 2L$, $L+R - (L-R) = 2R$ après avoir amené $L-R$

dans la bonne gamme de fréquences. On note $s(t)$ le signal de départ :



il est acceptable d'ajouter des amplis pour compenser k du multiplieur.

ou le facteur 2 final.

Problème 2 : Q5. $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\forall \mathcal{S}$ fermée $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$)

Q6. On va appliquer le théorème de Gauss pour le fil infini de densité linéique de charge λ, centré sur P.

sym : $\forall M \in \mathbb{R}^3$, $(M, \vec{e_z}, \vec{e_r})$ est Π^+ pour ρ donc Π^+ pour $\vec{E}$
$(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ // // car fil ∞

d'où $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{e_r}$

invar : distribut° de charge invariante par translat° selon $\vec{e_z}$ ou par rotat° d'angle θ d'où $\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r)\vec{e_r}$ pour conclure sur sym & invar surf. de Gauss : on prend un cylindre fermé de rayon r et de longueur h, selon l'axe (Oy).

Th. de Gauss : $\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$. Le fait que $D >> R$ et que seule la distribut° linéique de charge soit fournie incite à traiter le cas $r > R$ uniquement.

On a donc $\underbrace{0}_{\text{haut du cylindre, } E\vec{e_r}.dS\vec{e_y}=0} + \underbrace{0}_{\text{bas}} + E(r) \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ soit $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$

or $\vec{r} = \vec{PM}$ d'où $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{||\vec{PM}||^2}$.

si $r < R$ on aura $Q_{int} \propto r^2 h$ a priori (si ρ homogène) et donc $E(r) \propto r = ||\vec{PM}||$, l'expression qu'on a établie n'est donc vraie que pour M extérieur au fil.

Q7.

$dV = -\vec{E}.\vec{dr}$ (soit $a \in \mathbb{R}^+$ fixé), donc $V(r) - V(a) = \int_a^r dV = \int_a^r -\vec{E}.\vec{dr'} = \int_r^a \vec{E}.\vec{dr'}$

d'où $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_r^a \frac{dr'}{r'} \vec{e_r}.\vec{e_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\ln(a)}_{c^{te}} - \ln(r)\right] = \frac{\lambda \ln(a)}{2\pi\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(PM)$

Q8. Th. de Superposition : $V_{tot}(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{\lambda \ln(a)}{2\pi\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(PM) - \frac{\lambda\ln(b)}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(NM)$

et $||\vec{NM}|| = \sqrt{\vec{NM}.\vec{NM}} = \sqrt{||\vec{NO}||^2 + ||\vec{OM}||^2 + 2||\vec{NO}||\,||\vec{OM}||\cos\theta}$

$= \sqrt{\frac{D^2}{4} + r^2 + Dr\cos\theta}$, $||\vec{PM}|| = \sqrt{\frac{D^2}{4} + r^2 - Dr\cos\theta}$

soit $V(r,\theta) = \underbrace{c^{te}}_{=0 \text{ car } V \to 0,\ r\to+\infty} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D^2}{4} + r^2 + Dr\cos\theta\right) - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D^2}{4} + r^2 - Dr\cos\theta\right)$

$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\frac{D^2}{4} + r^2 + Dr\cos\theta}{\frac{D^2}{4} + r^2 - Dr\cos\theta}\right)$

Q9. À l'ordre 1 en $\frac{D}{r}$, $\frac{\frac{D^2}{4} + r^2 + Dr\cos\theta}{\frac{D^2}{4} + r^2 - Dr\cos\theta} \simeq \frac{1 + \frac{D}{r}\cos\theta}{1 - \frac{D}{r}\cos\theta} \simeq \left(1 + \frac{D}{r}\cos\theta\right)^2$

d'où $V(r,\theta) \simeq \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\ln\left(1 + \frac{D}{r}\cos\theta\right)$ et $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\simeq} x$ d'où $V(r,\theta) \simeq \frac{\lambda D}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta$

...ation de conservation de la charge électrique en 1D

Démontrer l'équation de conservation de la charge électrique en 1D. (5 points)

Le schéma ainsi que les notations, tant qu'elles sont explicitées, sont libres

Réponse :

Q10. $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{E} = \frac{\lambda D \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} + \frac{\lambda D \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_\theta}$.

et $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda D}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$, indépendant de θ

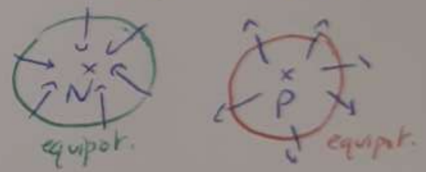
Q11. pour $r = h$, $E_0 \sim \frac{\lambda D}{2\pi\varepsilon_0 h^2}$ (on suppose que l'approx. $D \gg R$ reste valable pour notre odg). On a donc, avec $\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln(\frac{D}{R})}$, $E_0 \sim \frac{V_0 D}{h^2 \ln(\frac{D}{R})}$

$\frac{D}{R} \simeq 167$ donc $\ln(\frac{D}{R}) \sim \ln(\underbrace{3\times3\times3\times3}_{\substack{9 \\ 27 \\ 81}}\times 2) \simeq \underbrace{4\ln(3)}_{\simeq 1} + \underbrace{\ln(2)}_{\simeq 0,7} \simeq 5$) le prendre de l'ordre de 1 ou 10 est ok.

$3\times3\times3\times3\times2 = 162$.

$E_0 \sim \frac{V_0 D}{h^2 \times 5} \sim \frac{4\times10^5 \times 5}{5 \times 15 \times 15} \sim \frac{4\times10^5}{220} \sim 2\times10^3\ V.m^{-1}$

Q12. Oui, car les équipotentielles sont $\perp$ aux lignes de champ, que l'on sait être selon $\vec{e_r}$ pour la proximité d'un fil seul (quasi-cercles à proximité d'un des câbles)



Q13. On a $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ donc $\|\vec{E}\| \sim \frac{\tilde{V}}{\tilde{L}}$

avec $\tilde{V}$ la variation caractéristique de tension sur une longueur $\tilde{L}$

Q14. On a $\sim 30kV$ étalés sur $10m$ d'où $3kV/m$, c'est cohérent avec notre Q11. et respecte la réglementat°.

Problème 3 : Q15. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$, en R.S. $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

Q16. $\operatorname{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow \iiint_{V_{quelconque}} \operatorname{div}\vec{j}\, dV = 0$ d'où (Th. Ostrogradski) $\oiint \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$.

et donc $\vec{j}$ est à flux conservatif.

Q17. On prend un bol (2 hémisphères) entre r et r+dr, on a donc, sachant $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$.

$0 + \underbrace{\iint_{hémi\ r} \vec{j}(r).d\vec{S}}_{-I(r)} + \underbrace{\iint_{hémi\ r+dr} \vec{j}(r+dr).d\vec{S}}_{I(r+dr)} = 0$ avec I pris positif pour r croissant.

($d\vec{S}$ pointe vers l'extérieur)

Q18. $j(r) \times 2\pi r^2 = I$, voir Q.17 pour le schéma.

$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$

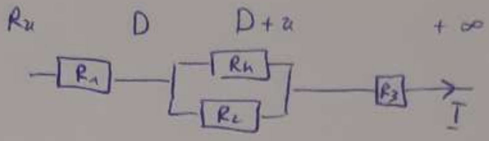
Q19. $\vec{j} = \gamma_s \vec{E}$

Q20. $\vec{E} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma_s} \vec{e_r}$, $V(r) - V(+\infty) = -\int_{+\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma_s} \left(0 + \frac{1}{r}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_s r}$

Q21. ① $R = \frac{U}{I} = \frac{V(R_a) - V(R_b)}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right)$

② $R = \frac{1}{2\pi\gamma_s R_a}$

Q22. $a \simeq 50\,cm$



On a $R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{2\pi\gamma_s R_a}$.

$R_1 = \frac{1}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{D}\right)$ $R_2 = \frac{1}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right)$ et $R_3 = \frac{1}{2\pi\gamma_s} \times \frac{1}{D+a}$

$\sim \frac{1}{1{,}8\times10^{-2}} \frac{a}{D^2}$

on a $R_h I_{max} = R_2 (I - I_{max})$ d'où $\frac{R_h I_{max}}{I - I_{max}} = \frac{1}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right)$

et si par chance $a \ll D$ $\frac{R_h I_{max}}{I - I_{max}} \times 2\pi\gamma_s \simeq \frac{a}{D^2}$ ou $D \simeq \sqrt{\frac{a(I - I_{max})}{R_h I_{max} 2\pi\gamma_s}}$

Q23. $R = \frac{\ell}{\gamma S}$ où $\rho_s = \frac{1}{\gamma_s}$ $\Rightarrow \gamma_s \simeq 3\times10^{-3}\,\Omega^{-1}m^{-1}$

Q24. Si le sol est humide sa conductivité ↘ donc D ↗, la zone de danger mortel augmente.

Q25. $\gamma_m \sim 6\times10^7\,\Omega^{-1}m^{-1}$. $\frac{1}{\gamma_m}$ complètement négligeable devant $\frac{1}{\gamma_s}$, m̂ humide.

Q26. $R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{2\times4}{6\times10^7\times\pi\times10^{-6}} = \frac{4}{10^2} = 0{,}04\,\Omega$

I_{max} entre 10 mA et 1 A est ok. $a \simeq 50\,cm$. R_h entre 2 et 50 kΩ

disons $R_h = 10^4\,\Omega$ $I_{max} = 10^{-1}A$, $D \simeq \sqrt{\frac{0{,}5\times10^4}{10^4\times10^{-1}\times6\times3\times10^{-3}}} \simeq \sqrt{\frac{10^4}{40\times1}}$

$\simeq \frac{\sqrt{10^3}}{2} \simeq 15\,m$

15 m >> 50 cm est plausible pour le DL de la

Q22. Autrement dit il faut éviter de se placer sous un arbre, car dans un rayon de 15 m autour du pt d'impact c'est dangereux.

Q27. En 1ère approx, on a $H^2 + D'^2 = D^2$ avec D' la nouvelle distance (car $a \ll D$).
de sécurité, inférieure. Si $H >> D$, on doit raffiner en reprenant le calcul car alors il y a nettement moins que "a" pour R_2

Prénom : ....

IV - Annexe

Annexe à détacher et à rendre avec votre copie

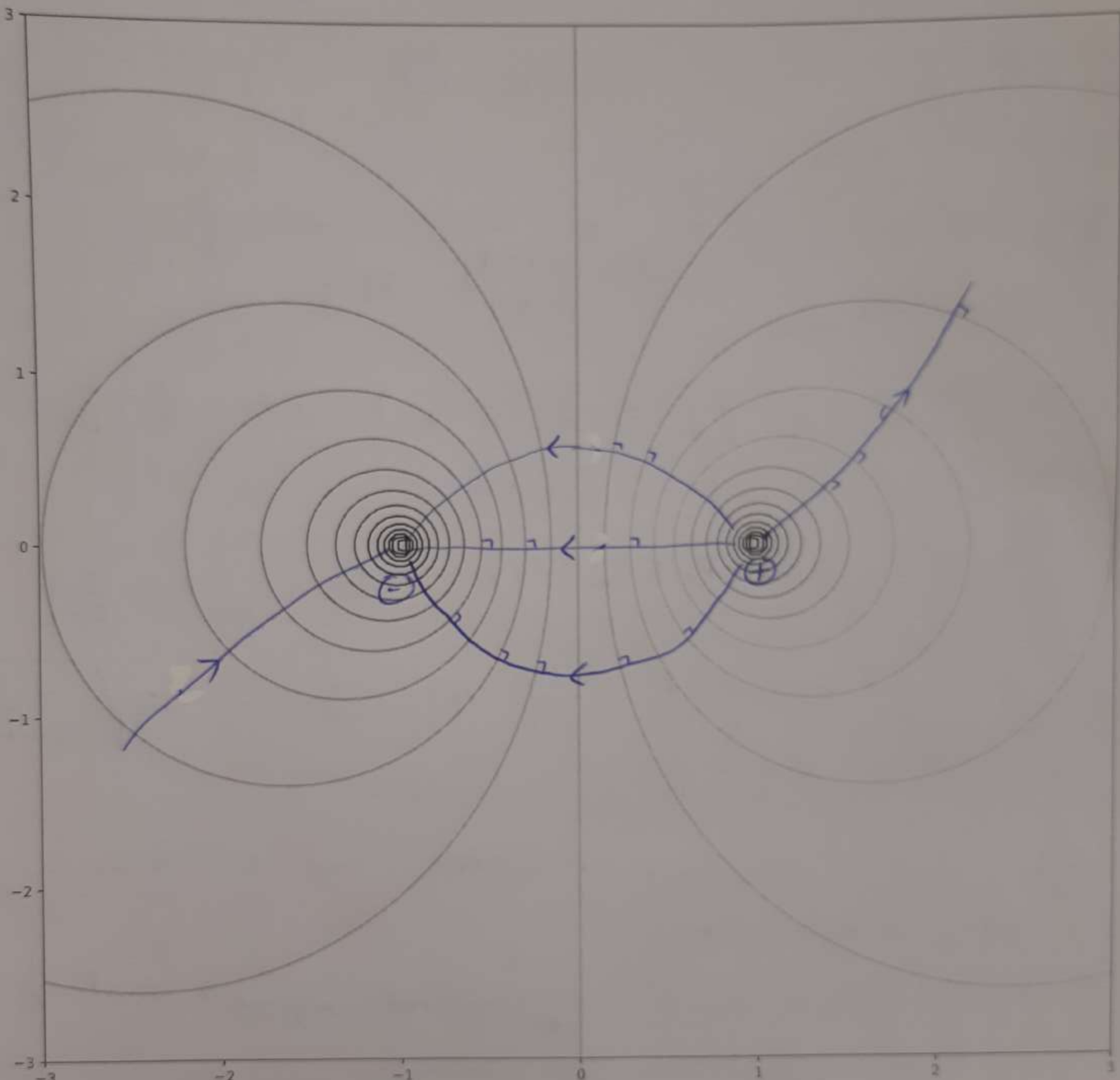


Fig. 3 – À un instant t, simulation des équipotentielles entre les deux câbles chargés, le câble chargé négativement étant à gauche, et le câble chargé positivement étant à droite.