Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque problème. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

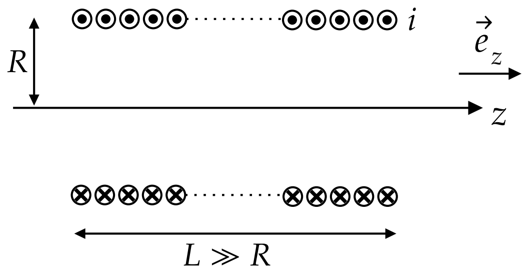
I - Problème 1 : Machine asynchrone

(∼ 50% des pts) *Les trois sous-parties du problème sont largement indépendantes.*

Les machines asynchrones sont des convertisseurs électromécaniques particulièrement robustes, utilisés par exemple pour la motorisation de lignes de métro et de certains TGV. Ce problème est une introduction au fonctionnement moteur de la machine asynchrone.

I.1 Étude d'une bobine du stator

On considère une bobine du stator comme un solénoïde quasi-infini, de rayon R et de longueur $L \gg R$, de sorte que l'on néglige les effets de bord selon $\overrightarrow{e_z}$. Les fils en cuivre du solénoïde forment N spires, toutes parcourues par un courant $i(t)$.



Q1. Rappeler l'ordre de grandeur de la conductivité électrique en régime stationnaire du cuivre.

Dans une machine réelle, i peut osciller à des fréquences jusqu'à $f = 200$ Hz.

Q2. Rappeler l'expression de l'équation de conservation de la charge, puis justifier rigoureusement que la densité volumique totale de charges ρ dans le cuivre peut être supposée quasi nulle ici.

Pour simplifier, on considère que l'espace est occupé uniquement par du cuivre ou par du vide.

Q3. Rappeler la condition de validité de l'ARQS électrique, et la condition de validité de l'ARQS magnétique. Puisque $\rho = 0$, en déduire la variante de l'ARQS étant valide ici.

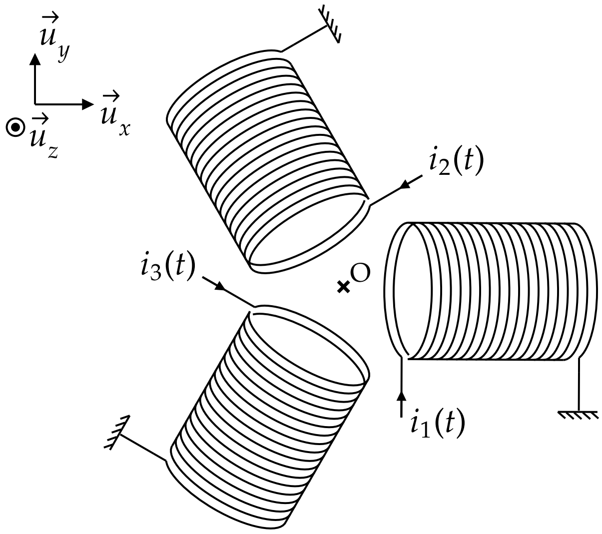
Q4. Rappeler l'expression générale de l'équation de Maxwell-Ampère, puis sa simplification en s'aidant du résultat de la question précédente.

Q5. En partant de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire (que l'on supposera vraie pour la suite du problème), démontrer rigoureusement le théorème d'Ampère.

Q6. En détaillant votre démarche, exprimer en tout point de l'espace le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par le courant $i(t)$ parcourant le solénoïde.

I.2 Création d'un champ tournant

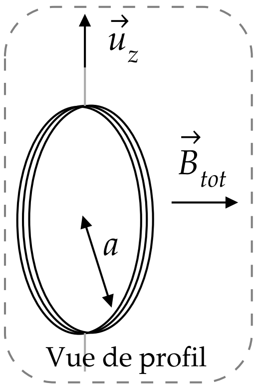
Pour mettre en rotation un rotor, on assemble trois solénoïdes identiques du stator, parcourus respectivement par $i_1(t) = i_0 \cos(\omega t)$, $i_2(t) = i_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$ et $i_3(t) = i_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$, agencés comme schématisé ci-contre. Chaque solénoïde est tourné de 120° vis-à-vis de ses deux voisins.
Un matériau ferromagnétique (non schématisé ci-contre) assure que les lignes de champs soient canalisées : le point O voit le même champ magnétique qu'un point simultanément à l'intérieur des trois solénoïdes infinis.

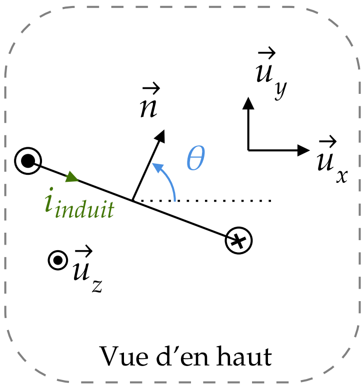


Q7. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{e_{z1}}$, $\overrightarrow{e_{z2}}$ et $\overrightarrow{e_{z3}}$ selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$, puis détailler votre raisonnement afin de calculer le champ total en O. On mettra le résultat sous la forme $\overrightarrow{B}_{stator} = B_0 \left[\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\right]$, en exprimant B_0 en fonction des constantes fondamentales et de i_0, N et L.

I.3 Couple d'une machine asynchrone

On place désormais une bobine circulaire de rayon $a = 3$ cm contenant $N' = 100$ enroulements de fil, centrée sur O. Cette bobine est libre de tourner selon l'axe (O $\vec{u}_z$), et est plongée dans le champ magnétique $\overrightarrow{B}_{stator}$ créé par les solénoïdes du stator. La spire a été faite avec un fil de cuivre de résistivité $\rho = 1,67 \times 10^{-8}$ Ω.m, de diamètre $e = 0,5$ mm. La bobine est court-circuitée sur elle-même, et n'est donc pas alimentée par une quelconque source de tension extérieure.





Q8. Déterminer, en détaillant votre raisonnement, la valeur numérique de l'ordre de grandeur de la résistance r électrique du circuit au rotor.

Q9. Rappeler la définition d'une inductance propre L. On s'appuiera sur un schéma et on précisera les éventuelles conventions de signes.

On donne la valeur du flux propre d'**une** spire de rayon a, faite d'un fil de diamètre e, parcourue par un courant i_{induit} :

$$\Phi_1 = \mu_0 i_{ind} a \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8a}{e}\right) - \frac{7}{8}\right)$$

Q10. En déduire, en justifiant, l'expression de l'inductance propre L de l'enroulement de N' spires.

On rappelle que le champ créé par le stator en O s'écrit : $\overrightarrow{B}_{stator} = B_0 \left[\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\right]$, et est supposé uniforme à l'échelle du rotor.

Q11. Représenter le circuit électrique équivalent au rotor, en y faisant figurer le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, puis démontrer :

$$i_{ind}(t) = \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\pi a^2 B_0(\omega - \dot{\theta})}{r\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \theta + \varphi)$$

Avec α une constante que l'on ne cherchera pas à expliciter. On exprimera φ et τ en fonction des données du problème.

On se place en régime permanent, de sorte que $t \gg \tau$ soit tel que le régime transitoire se soit éteint par rapport à la solution i_{ind} en régime permanent.

Q12. Simplifier l'expression précédente, puis déterminer l'expression du moment magnétique $\overrightarrow{M}$ du rotor.

Q13. En déduire l'expression du couple $\overrightarrow{\Gamma}$ perçu par le rotor du fait de la présence de $\overrightarrow{B}_{stator}$. On montrera que ce couple est strictement nul si $\omega = \dot{\theta}$.

Une machine synchrone a un couple nul au démarrage (lorsque $\dot{\theta} = 0$), et une machine à courant continu a des balais s'usant au fil du temps.

Q14. Justifier que le couple de la machine asynchrone est non-nul lorsque $\theta = \theta_0 = \mathrm{C^{te}}$, et qu'elle n'a pas besoin de balais.

Q15. En déduire qu'un moteur asynchrone a un rotor tournant à une pulsation plus faible que la pulsation de rotation du champ statorique.

II - Problème 2 : À propos des équations de Maxwell lors d'un changement de référentiel

($\sim$ 30% des pts) *Les deux sous-parties sont largement indépendantes*

II.1 Analyse des équations de Maxwell

Q16. Rappeler l'expression des équation de Maxwell, en nommant chacune des équations.

On considère un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ attaché au point O et de vecteurs de base $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, puis un second référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ attaché au point O', en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_e} = v_e \overrightarrow{e}_x$. On restera dans ce problème dans le cadre de la mécanique Newtonienne, donc non-relativiste.

Q17. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ rappeler l'expression de la force de Lorentz $\overrightarrow{F}$ sur une particule chargée animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{R}$.

Q18. Expliciter la formule de transformation des vitesses reliant la vitesse $\overrightarrow{v'}$ de la particule dans $\mathcal{R}$ à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v_e}$.

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le champ électromagnétique précédent est caractérisé par les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E}'$ et $\overrightarrow{B}'$.

Q19. Sachant que la force de Lorentz est invariante par changement de référentiel, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{E}'$, $\overrightarrow{B}'$ et $\overrightarrow{v_e}$.

Si (x,y,z,t) sont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (x',y',z',t') sont les coordonnées dans $\mathcal{R}'$, alors la transformation de Galilée permettant de passer d'un système de coordonnées à l'autre s'écrit :

$$x' = x - v_e t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

On admet alors que les dérivées partielles sont reliées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \qquad \frac{\partial}{c\partial t} = \frac{\partial}{c\partial t'} - \frac{v_e}{c}\frac{\partial}{\partial x'}$$

On se place dans un domaine de l'espace où la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant sont nuls.

Q20. Montrer que l'équation de Maxwell-Thomson est invariante par changement de référentiel galiléen.

Q21. Étudier de la même manière l'équation de Maxwell-Gauss lors d'un changement de référentiel. Commenter votre résultat.

II.2 Cas d'un fil chargé en translation

On cherche à préciser cette observation sur un cas concret. On considère un fil rectiligne uniformément chargé très long et fin, coïncidant avec les axes Ox et O'x'. Il est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$ donc animé dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_e} = v_e \overrightarrow{e_x}$. On note λ_0 la densité linéique de charge mesurée dans $\mathcal{R}'$.

Q22. Déterminer en un point quelconque situé en dehors de l'axe, les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E}'$ et $\overrightarrow{B}'$ créés par le fil dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Q23. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, exprimer le courant électrique I semblant passer par le fil, en fonction de λ_0 et de v_e. On fera apparaître la convention d'orientation de I choisie ainsi que le vecteur $\overrightarrow{e_x}$.

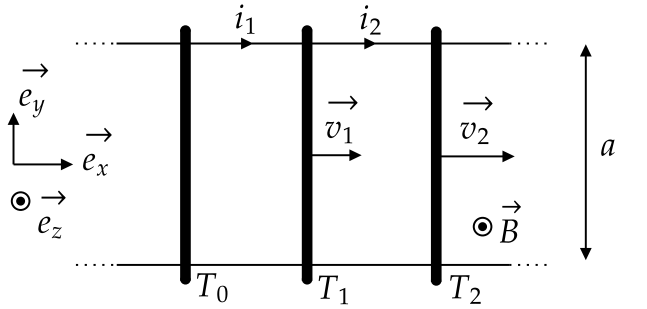
Q24. En déduire la valeur du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, en tout point hors de l'axe.

Q25. Comparer la valeur obtenue avec celle suggérée pour $\overrightarrow{B}$ par la transformation obtenue en question 19.

III - Problème 3 : Poursuite de tiges

($\sim$ 20% des pts) *D'après un sujet d'oral Centrale 2 MP*

On considère $n+1$ tiges identiques de masse m et de résistance R, pouvant glisser sans frottement sur deux rails horizontaux équidistants de a. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant. La tige T_0 est maintenue fixe et on **impose** une vitesse $v_n = v_0$ constante à la $n^{\text{ème}}$ tige. À l'instant initial, les tiges sont placées de telle sorte que $x_k(0) = ka$ et toutes les tiges sauf T_n sont immobiles. On négligera le champ magnétique propre des spires devant $\overrightarrow{B}$.



Q26. Dans le cas $n = 1$ démontrer que la force électromotrice induite dans le circuit s'écrit $e_1 = Bav_1$.

En généralisant le résultat on admet que pour $n \geq 1$ la force électromotrice qui apparaît dans chacune des tiges est $e_n = Bav_n$.

Q27. On se place dans le cas $n = 2$. Quel est le schéma électrique équivalent du circuit ? Quelle équation vérifie la vitesse de la tige T_1 ?

Q28. Montrer alors que $v_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ où on exprimera τ en fonction de m, B, R et a.

Q29. Quel est le mouvement des tiges en régime permanent ? Retrouver ce résultat en régime permanent sans faire une étude mécanique complète du système.

On se place dans le cas où n est quelconque.

Q30. Quel est le mouvement en régime permanent ? Comment varie l'énergie du système entre l'instant initial et le régime permanent final ?

Éléments de correction : DS n°3

Q1. $\gamma \simeq 6 \times 10^{7}\ \Omega^{-1} m^{-1}$

Q2. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$. Dans un conducteur électrique, le modèle de Drude donne : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ pour $\tau\omega \ll 1$. En odg $\tau \simeq 10^{-14}$ s pour un métal, pour $f \sim 200$ Hz maximum $\gamma(\omega) \simeq \gamma_0$ est donc valable, d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\rho = 0$ de temps caractéristique $\tau_2 \sim \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} \sim \frac{10^{-11}}{6\times 10^{7}} \sim 1,6 \times 10^{-19}$ s

si on travaille à des échelles de temps supérieures, et c'est le cas, $\rho \simeq \underbrace{\rho_H}_{\xrightarrow[t \gg \tau_2]{} 0} + \rho_{sp} \simeq \rho_{sp} = 0$.

Q3. AROS E : $\frac{L}{c\tau} \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \ll 1$

M : $\frac{L}{c\tau} \times \frac{\tilde{\rho} c}{\tilde{j}} \ll 1$

$\tilde{\rho} = 0 \Rightarrow$ on est en ARQS magnétique.

Q4. $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, et en ARQSM

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

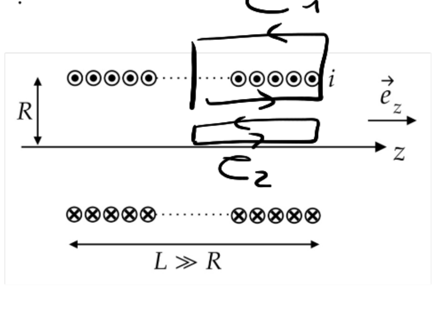
Q5. on intègre : $\iint \overrightarrow{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Th. Stokes $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{I_{enlacé}}$

Q6. voir cours. sym : $\vec{B} = B_\theta \vec{e_\theta}$

invar : $\vec{B} = \vec{B}(r)$

contour : schéma.

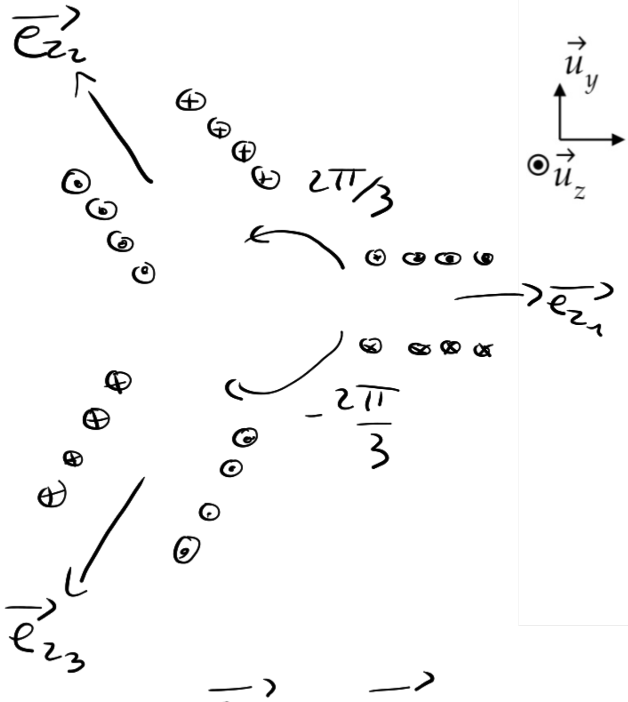


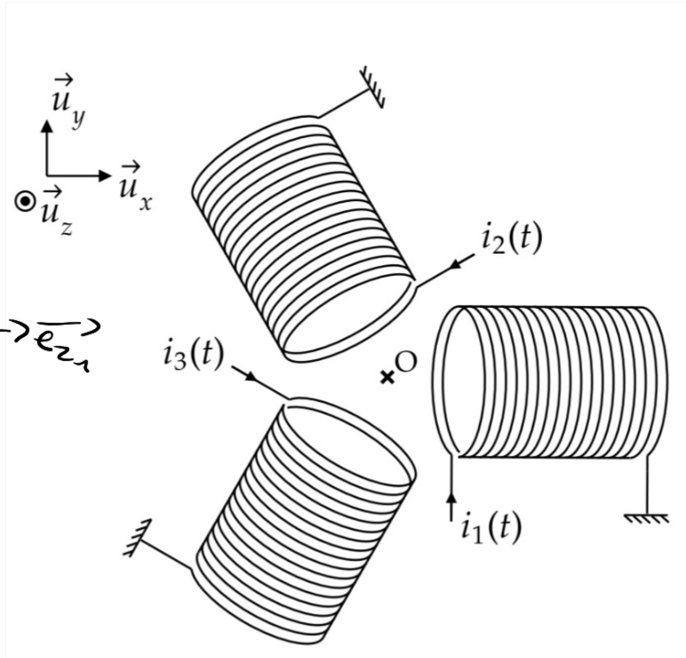
Th. d'Ampère : • $B(+\infty) = 0$ à donner

$$\mathcal{C}_2 \Rightarrow \bullet \quad B(r<R) = C^{te}$$

$$\mathcal{C}_1 \Rightarrow \bullet \quad \underbrace{-B(+\infty)}_{=0} + B(r<R) = \mu_0 \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{N}{L}}}{n}\, i$$

Q7.





$$\vec{e_{z_1}} = \vec{u_x}$$

$$\vec{e_{z_2}} = \cos\frac{2\pi}{3}\,\vec{u_x} + \sin\frac{2\pi}{3}\,\vec{u_y}$$

$$= -\frac{\vec{u_x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_y}$$

$$\vec{e_{z_3}} = -\frac{\vec{u_x}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_y}$$

$$\vec{B}(O) \overset{\text{ppe superposito}}{=} \vec{B_1}(O) + \vec{B_2}(O) + \vec{B_3}(O)$$

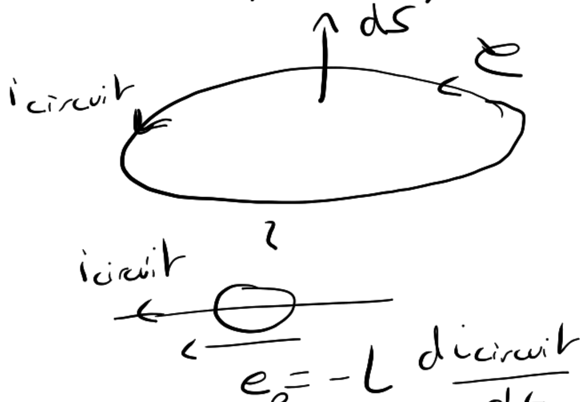
$$= \mu_0 n i_0 \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\omega t - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{u_x} \\ \vec{u_y} \\ \vec{u_z} \end{matrix} \end{array}$$

$$= \mu_0 n i_0 \begin{pmatrix} \cos\omega t - \cos\frac{2\pi}{3}\cos\omega t \\ \sqrt{3}\sin\omega t \sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\mu_0 n i_0}_{B_0} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q8. $r = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\rho \ell}{S} = \frac{4 \rho \ell}{\pi e^2} = \frac{8 \rho N' a}{e^2} = 1{,}6\ \Omega$

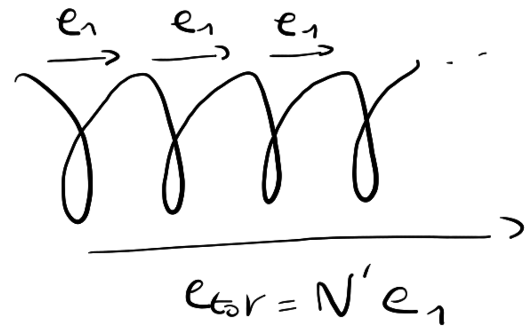
Q9. Pour ϕ_{propre} le flux propre, (flux du champ B créé par le circuit lui-même au travers de sa propre sect°), on a



$\phi_{prop} = L\, i_{circuit}$

$\hat{=} \iint_{circuit} \overrightarrow{B_{propre}} \cdot \overrightarrow{dS}$

Q10. $\overrightarrow{B_{propre_{N'}}} = N' \overrightarrow{B_{propre\,1}}$



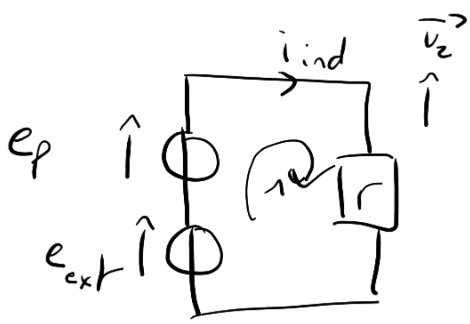
d'où $\phi_{propre_{N'}} = \iint_{circuit'} N' \overrightarrow{B_{propre}} \cdot \overrightarrow{dS}$

$= \sum_{i=1}^{N'} \iint_{spire\ seule} N' \overrightarrow{B_{propre}} \cdot \overrightarrow{dS}$

$= N'^2 \phi_1 = L\, i_{ind}$ avec

$L = N'^2 \mu_0 a \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{8a}{e}\right) - \frac{7}{8} \right)$

Q11. $e_p + e_{ext} = r\, i_{ind}$



$-L \frac{di_{ind}}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt} = r\, i_{ind}$

or $\overrightarrow{B_{ext}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{B_{stat}} \cdot (\cos\theta\, \vec{u_x} + \sin\theta\, \vec{u_y})$

$= B_0 \cos(\omega t - \theta)$

$\frac{L}{r} \frac{di_{ind}}{dt} + i_{ind} = \frac{N' B_0 \pi a^2}{r} (\omega - \dot{\theta}) \sin(\omega t - \theta)$

on pose $\tau = \frac{L}{r}$. On est en RSF pour la solut° particulière, que l'on cherche sous la forme

$A \sin(\omega t - \theta + \varphi)$:

$$A\tau(\omega - \dot\theta)\cos(\omega t - \theta + \varphi) + A\sin(\omega t - \theta + \varphi) = N' \frac{B_0 \pi a^2}{r}(\omega - \dot\theta)\sin(\omega t - \theta)$$

d'où : $$\begin{cases} \cos\varphi \, A\tau(\omega - \dot\theta) + A\sin\varphi = 0 \\ -A\tau(\omega-\dot\theta)\sin\varphi + A\cos\varphi = N'\frac{B_0\pi a^2}{r}(\omega - \dot\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\varphi = -\tau(\omega - \dot\theta) \\ A\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \cos\varphi\right) = N'\frac{B_0 \pi a^2}{r}(\omega - \dot\theta) \end{cases}$$

$$A = N'\frac{B_0\pi a^2}{r}(\omega - \dot\theta)\cos\varphi$$

et $\cos(\tan^{-1} x) = \cos y$ où $x = \tan y$

$x = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y}$ donc $x^2 = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$

d'où $\cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$ d'où

$\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $A = \frac{N' B_0 \pi a^2 (\omega - \dot\theta)}{r\sqrt{1+\tau^2(\omega-\dot\theta)^2}}$

(erreur dans l'énoncé)

Q12. pour $t \gg \tau$ seule la solution particulière demeure, donc $i_{ind} \simeq \frac{N'\pi a^2 B_0(\omega - \dot\theta)}{r\sqrt{1+(\dot\theta-\omega)^2\tau^2}}\sin(\omega t - \theta + \varphi)$

d'où $\vec{M} = N' i_{ind} \pi a^2 \vec{n}$

Q13. $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{stator} = N' B_0 i_{ind} \pi a^2 \vec{n} \wedge (\cos\omega t \, \vec{u_x} + \sin\omega t \, \vec{u_y})$

$$\vec{\Gamma} = B_0 i_{ind} \pi a^2 N' (\cos\theta \sin\omega t - \sin\theta \cos\omega t) \vec{u_z}$$
$$= N' B_0 i_{ind} \pi a^2 \sin(\omega t - \theta) \vec{u_z}$$

si $\omega = \dot{\theta}$ $\quad i_{ind} = 0$, d'où $\vec{\Gamma} = \vec{0}$

Q14. Lorsque $\dot{\theta} = 0$ on a

$$\vec{\Gamma} = \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 \omega N'}{r\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \theta_0 + \varphi) \sin(\omega t - \theta_0) \vec{u_z}$$

non-nul $\forall t$, seulement en des points t : $\exists t$ tel que $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$ et donc par TMC la machine démarrera ($\dot{\theta} \neq 0$). L'induction ne nécessite pas de milieu matériel pour la propaga^o de $\vec{B}$, et le rotor est en court-circuit sur lui-même : cette machine n'a donc pas besoin au rotor de connexions extérieures, donc pas de balais.

Q15. Par TMC au rotor selon l'axe (Oz) :

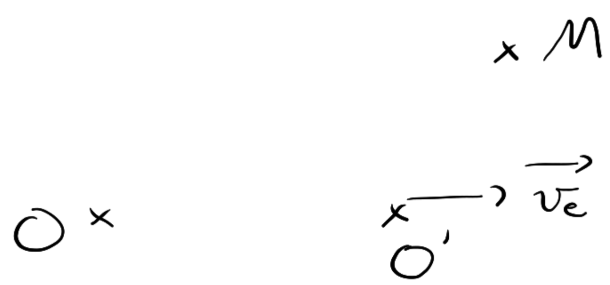
$$J\ddot{\theta} \vec{e_z} = \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 (\omega - \dot{\theta})}{r\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} N' \sin(\omega t - \theta + \varphi) \sin(\omega t - \theta) \vec{u_z}$$

si $\dot{\theta} > \omega$ le couple freine la machine, jusqu'à $\dot{\theta} < \omega$ $\left(\langle \sin(\omega t - \theta + \varphi) \sin(\omega t - \theta) \rangle = \frac{\cos\varphi}{2} > 0 \right)$

où $\vec{\Gamma} \cdot \vec{u_z} > 0$, qui est bien un couple moteur pouvant s'opposer à la charge et aux frottements maintenir la vitesse de rotat° du moteur.

C'est en somme logique : si $\dot{\theta} = \omega$, $\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial t} = 0$, il n'y a plus de courants induits !

Problème 2 :



Q17.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Q18. On a $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ d'où

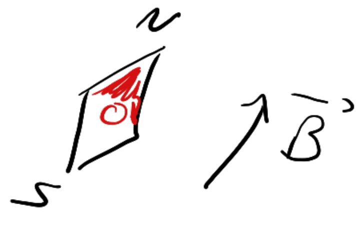
$$\underbrace{\vec{v}_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}'} = \vec{v_e} + \underbrace{\vec{v}_{\mathcal{R}'}}_{\vec{v}}$$

$$\vec{v}' = \vec{v_e} + \vec{v}$$

Q19. $q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} = q\vec{E}' + q\vec{v} \wedge \vec{B}'$

vrai $\forall \vec{v}$, donc pour $\vec{v} = \vec{0}$,

$$\begin{cases} q\vec{E} + q\vec{v_e} \wedge \vec{B} = q\vec{E}' \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases}$$



Q20. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ donc

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{R}.$$

Dans $\mathcal{R}'$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}' = \frac{\partial B_x'}{\partial x} + \frac{\partial B_y'}{\partial y} + \frac{\partial B_z'}{\partial z}$ car

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$, idem pour y & z.

or $\vec{B} = \vec{B}'$ donc $\vec{\nabla}'.\vec{B}' = 0$,

l'eq. de Maxwell-Thomson est donc invariante par changement de référentiel.

Q21. $\vec{\nabla}.\vec{E} = \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{=0 \text{ ici, vide de charge d'après l'énoncé}}$ dans $\mathcal{R}$. Calculons $\vec{\nabla}'.\vec{E}'$ dans $\mathcal{R}'$:

$= \frac{\partial E_x'}{\partial x} + \frac{\partial E_y'}{\partial y} + \frac{\partial E_z'}{\partial z}$ car $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$, idem pour y & z

d'où

$$\vec{\nabla}'.\vec{E}' = \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{E}}_{\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ ici, vide de charge, mais peu importe}} + \frac{\partial (\vec{v_e} \wedge \vec{B}).\vec{e_x}}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{v_e} \wedge \vec{B}).\vec{e_y}}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{v_e} \wedge \vec{B}).\vec{e_z}}{\partial z}$$

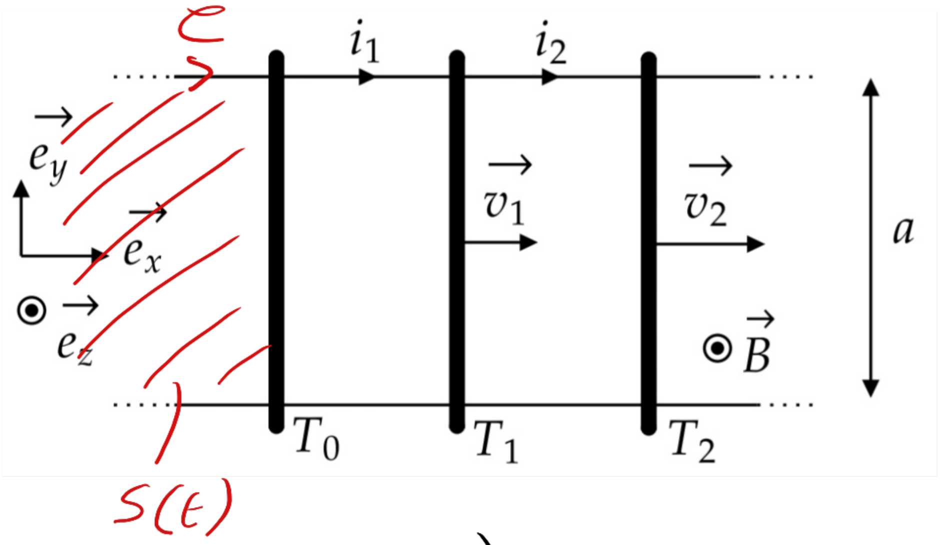
il est facile de construire $\vec{v_e} = \alpha z \vec{e_x}$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e_y}$ pour montrer que

$\vec{\nabla}'.\vec{E}' \neq \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{=0 \text{ ici, vide de charge}}$: mais $\vec{\nabla}'.\vec{E}' = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \alpha B_0$

Problème 3 :

Q26. $e_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ d'après la loi de Faraday, d'où, avec $S(t) = a \times x_1(t)$ et

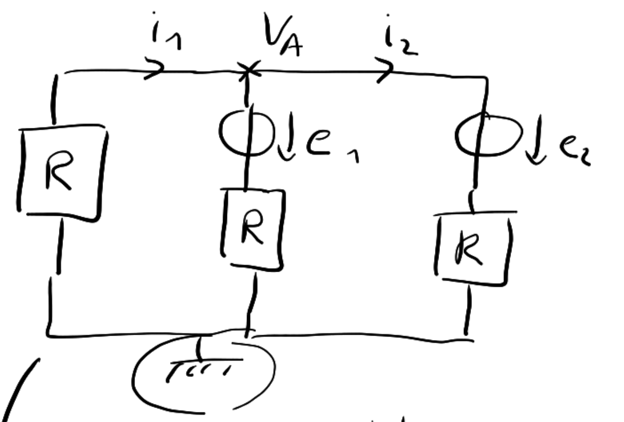
$\vec{B} = B\vec{e_z}$ uniforme et stationnaire, d'où



$e_1 = a v_1 B$

(on a orienté $\mathcal{C}$ dans le sens de i_1, donc $\vec{dS}$ est selon $-\vec{e_z}$ ici).

Q27. Calculons $i_1 - i_2$, pour connaître l'intensité du courant parcourant la tige T_1 :



choix arbitraire du potentiel nul

* précisions en fin de pdf

$$\begin{cases} i_1 = -\dfrac{V_A}{R} \\ R\, i_2 - e_2 = V_A \\ -R(i_2 - i_1) - e_1 = V_A = -R i_1 \\ \qquad = R i_2 - e_2 \end{cases}$$

donc $-2R(i_2 - i_1) - 2e_1 = R(i_2 - i_1) - e_2$

$$-3R(i_2 - i_1) = 2e_1 - e_2$$

$$\vec{F} = (i_1 - i_2) \times -\vec{e_y}\, a \wedge B\vec{e_z}$$

on a $m\dfrac{dv_1}{dt} = \underbrace{(i_2 - i_1) B a}_{F_{Laplace}}$

$$m\frac{dv_1}{dt} = -\frac{2e_1 - e_2}{3R} B a$$

Q28. $e_1 = a v_1 B$, $e_2 = a v_2 B$ où $v_2 = v_0$ d'où

$$m\frac{dv_1}{dt} + \frac{2B^2a^2}{3R}v_1 = \frac{B^2a^2}{3R}v_0$$

$$\tau = \frac{3mR}{2B^2a^2} \qquad v_1 = \alpha e^{-t/\tau} + \underbrace{v_{sp}}_{=\frac{v_0}{2}}$$

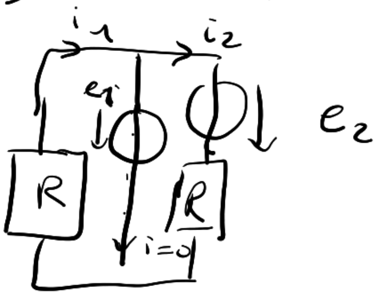
et $v_1(t=0)=0$ d'où $\alpha = -\frac{v_0}{2}$

Q29. pour $t \to +\infty$ on a $v_1(t) \to \frac{v_0}{2}$

et $v_2(t) = v_0$ toujours constant.

on impose $e_2 = Bav_0$, et en régime permanent $\frac{dv_i}{dt} = 0$ donc $\frac{de_i}{dt} = 0$, donc la force de Laplace est nulle, donc

$i_1 = i_2$, d'où ~



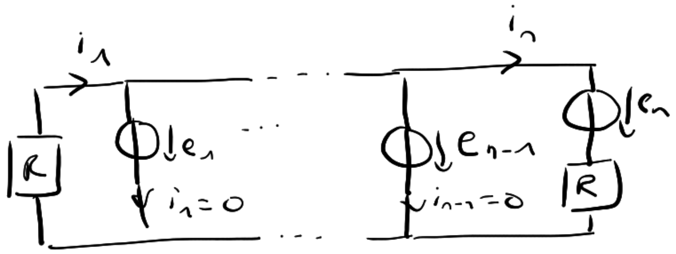
$$\begin{cases} e_1 = Ri_1 \\ e_2 = Ri_2 + e_1 \end{cases}$$

$$= Ri_1 + e_1 = 2e_1 \qquad \text{d'où } e_1 = \frac{e_2}{2}$$

donc $v_1 = \frac{v_0}{2}$ (en R.P.)

Q30, pour n quelconque ;

en R.P. le circuit équivalent vaut :



d'où : $v_1 = v_i = v_{n-1}$ pour $i \in [\![1;n-1]\!]$,

$$\begin{cases} e_i = e_n - Ri_n \\ e_i = Ri_1 \end{cases}$$

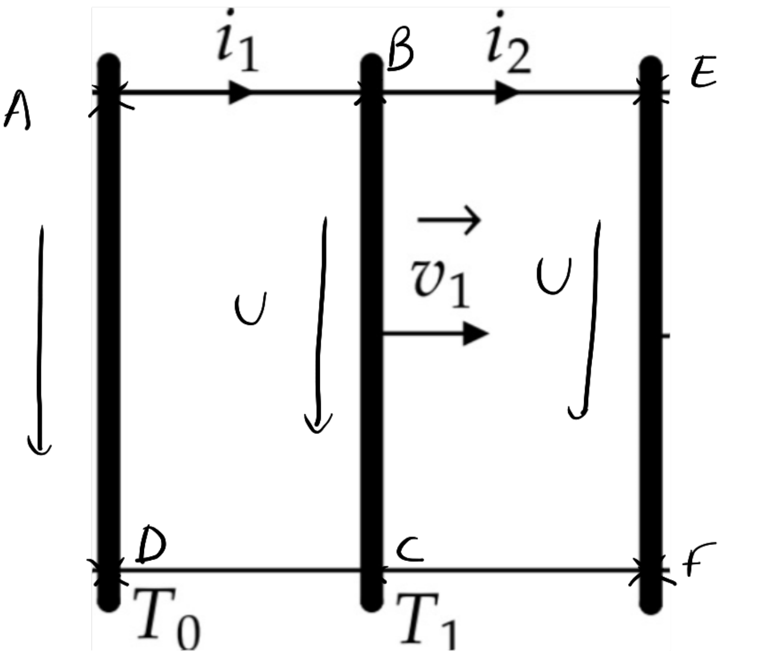
$i_n = i_1$ à nouveau, en R.P. (les i_i sont tous égaux) d'où $e_n = 2e_i$ d'où $v_i = \frac{v_0}{2}$ $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$

$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2$, $E_f = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{n-2}{4}\right)$

(rappel : une résistance ne <u>stocke</u> pas d'énergie)

---

* pourquoi placer les fem induites en série avec les tiges en mouvement ?



$$\begin{cases} \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot \vec{dl} = B a v_1 \\ \oint_{AEFD} \vec{E} \cdot \vec{dl} = B a v_2 \end{cases}$$

Dans un conducteur,

$\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int \frac{\vec{j}}{\gamma} \cdot \vec{dl}$: dans un fil idéal $\gamma \to +\infty$

donc la fem sera au niveau des résistances (donc pas entre A & B ou C&D)

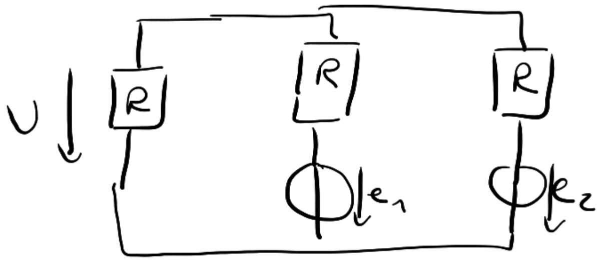
et $$\begin{cases} \int_D^A \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_B^C \vec{E} \cdot \vec{dl} = B a v_1 \\ \int_D^A \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_E^F \vec{E} \cdot \vec{dl} = B a v_2 \end{cases}$$

$-\int_D^A \vec{\nabla} V \cdot \vec{dl} = \int_A^D \vec{\nabla} V \cdot \vec{dl} = V(D) - V(A) = U$

donc notre loi des mailles doit vérifier :

$$\begin{cases} U = B a v_1 - \underbrace{\int_B^C \vec{E} \cdot \vec{dl}}_{R(i_2 - i_1)} & (1) \\ \underbrace{U}_{R i_1} = B a v_2 - \underbrace{\int_E^F \vec{E} \cdot \vec{dl}}_{R i_2} & (2) \end{cases}$$

Si on écrit



$e_1 = B u v_1$

$e_2 = B u v_2$ on

retrouve bien par loi des mailles (1) et (2)