Éléments de correct° DS n°4 :

Q 1. $E_{cem} = \phi \Omega$ et $\Gamma_m = \phi i$

Q 2. $\phi = \dfrac{E_{cem}}{\Omega} \simeq \dfrac{15}{4\times 6 \times 10^3/60} \simeq \dfrac{15 \times 2{,}5}{1000} \simeq 0{,}04 \ \mathrm{T.m^2}$

$$i = \frac{\Gamma_{em}}{\phi} = \frac{\Gamma_r}{\phi} \simeq \frac{60}{0{,}04} = 1500 \ \mathrm{A} \ !$$

clairement surévalué // à ce qui circule dans une vraie perceuse

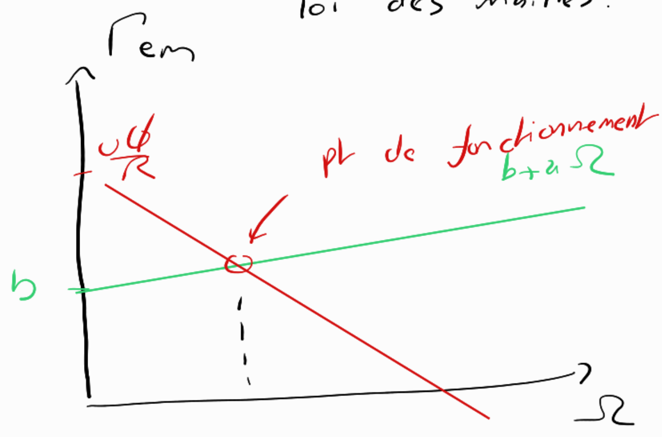
Q 3. $u = E_{cem} + Ri$ d'où $R = \dfrac{u - E_{cem}}{i}$

$$= \frac{5}{1500} \simeq 3{,}3 \ \mathrm{m\Omega}$$

Q 4. en régime stationnaire le TMC devient

$$\underbrace{-\Gamma_r}_{\text{couple résistant, s'oppose à } \Gamma_{em} > 0} + \Gamma_{em} = 0 \quad \text{or} \quad \Gamma_{em} = \underbrace{\frac{\phi}{R}(u - \underbrace{\phi\Omega}_{E_{cem}})}_{\text{loi des mailles}}$$

donc $\Gamma_{em} = E_{cem} \times \Omega$
$= b + a\Omega$



Q 5. Les frottements ralentissant la mèche de la perceuse sont ici la puissance utile (pour trouer),

donc $\eta = \dfrac{P_{utile}}{P_{coûteuse}} = \dfrac{\Gamma_r \times \Omega}{u \times i} = \dfrac{(a + b\Omega)\Omega}{u \times i}$

et $u \times i = Ri^2 + E_{cem} i = Ri^2 + (a + b\Omega)\Omega$

soit $\eta = \dfrac{(a + b\Omega)\Omega}{(a+b\Omega)\Omega + Ri^2}$ → $P_{dissipée}$ par effet Joule

Q 6. $J\dot{\Omega} = \frac{\phi}{R}(u - \phi\Omega) - b - a\Omega$

$$\tau^{-1} = \frac{\phi^2}{JR} + \frac{a}{J} = \frac{1}{3\times10^{-7}}\Big(\underbrace{\frac{0{,}04}{0{,}017} + 0{,}01}_{\simeq 2}\Big)$$

$$\tau^{-1} = \frac{2}{3\times10^{-7}}\ s^{-1} = 6\times10^{6}\,s^{-1}$$

clairement le moteur est surdimensionné pour cette applicat°

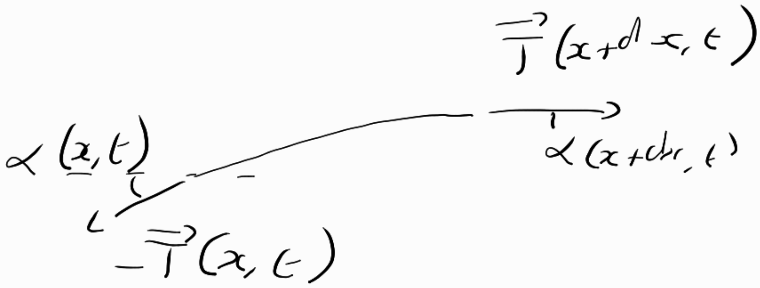
Pb n° 2 :

Q7 : $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (pythagore) donc

$$dl = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$\simeq dx$ au 1er ordre non nul.

Q 8. tensions notées $\vec{T}$ de la partie droite de la corde sur sa partie gauche.



Q 9. on applique le PFD à l'élément de corde de longueur dx (voir le cours ...)

$$\begin{cases} dm\,\ddot{y} = \frac{\partial T\sin\alpha}{\partial x}\,dx \\ dm\,\underbrace{\ddot{x}}_{=0} = \frac{\partial T\cos\alpha}{\partial x}\,dx \end{cases} \underset{\cos\alpha \simeq 1}{\Rightarrow} \vec{T} = \vec{T_0} = C^{te}$$

pas de mvt longitudinal

$$\mu\ddot{y} = T_0\frac{\partial\sin\alpha}{\partial x} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T_0}{\mu}$$

Q10. $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ (car c C^{te} posée >0), on a

$\frac{T_0}{\mu}$ en $\frac{kg\, m\, s^{-2}}{kg \cdot m^{-1}}$ $\iff$ $m^2 . s^{-2}$ donc c

en $m . s^{-1}$

$$\mu = \frac{dm}{d\ell} = \frac{\rho S d\ell}{d\ell} = \rho \pi \frac{d^2}{4}$$

$$c = \sqrt{4 \frac{T_0}{\rho \pi d^2}} = \sqrt{\frac{4 \times 800}{8000 \times 3 \times 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{4}{3} \times 10^5}$$

$$\simeq 4 \times 10^2 \ m . s^{-1}$$

Q11. onde s'écrivant sous la forme

$$y(x,t) = f(t) \times g(x)$$

Q12. voir cours, on injecte dans l'équat° d'onde,

$$f'' g = c^2 g'' f \quad \text{donc} \quad \frac{f''}{f} = c^2 \frac{g''}{g}$$ d'où fct° de t, fct° de x

$f'' = Af$ $\quad g'' = \frac{A}{c^2} g$, seul $A < 0$ est physiquement acceptable

$$f(t) = \alpha \cos(\sqrt{-A}\, t + \varphi)$$
$$g(x) = \beta \cos\left(\frac{\sqrt{-A}}{c} x + \psi\right)$$

$$\omega = \sqrt{-A} \qquad k = \frac{\sqrt{-A}}{c} \qquad y_0 = \alpha \beta$$

Q13. on a $\forall t$ $\cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} [\pi]$

et $y(x,t) = y_0 \times (-1)^m \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$

d'où $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = 0 [\pi]$ d'où

$kL = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, $\omega_p = \frac{p \pi c}{L}$, $p \in \mathbb{N}$ (car $\omega \geq 0$)

Q14. $y(x,0) = \alpha(x)$ donc

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$ or la TF de $\tilde{\alpha}(x)$

s'écrit $\tilde{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) + v_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right)$, connaître les v_n de $\tilde{\alpha}$ donne donc les u_n, égaux aux v_n.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x) \quad \text{donc} \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donc connaître les v_n de $\tilde{\beta}$ donne les $b_n \frac{n\pi c}{L}$

et donc $b_n = \frac{L}{2\pi c} v_n(\tilde{\beta})$

Q15. Calculons v_n pour β fourni, sachant que $v_n(\tilde{\alpha}) = 0$ car $\tilde{\alpha} = 0$ dans le cas présenté.

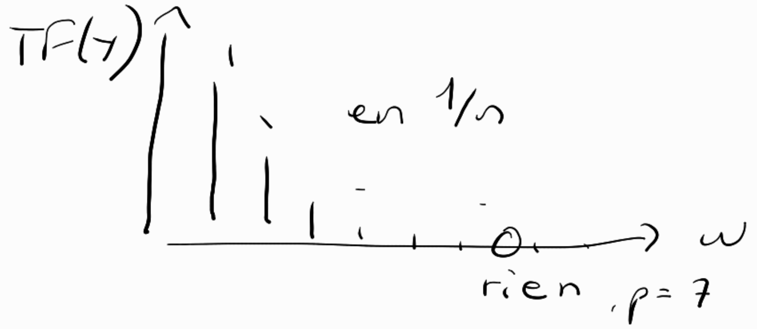
$$v_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \beta(x) \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx = -\frac{\beta_0}{L}\int_{\frac{L}{p}-\delta}^{\frac{L}{p}+\delta} \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx$$

$$v_n = \frac{\beta_0}{L}\left[\frac{\cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right)}{\frac{\pi n}{L}}\right]_{\frac{L}{p}-\delta}^{\frac{L}{p}+\delta}$$

$$= \frac{\beta_0}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{L}\left(\frac{L}{p}+\delta\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{L}\left(\frac{L}{p}-\delta\right)\right)\right]$$

$$v_n = \frac{\beta_0}{n\pi} \times 2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)}_{=0 \text{ si } p=n} \sin\left(\frac{\pi n \delta}{L}\right)$$

donc $b_p = 0$, $y(x,t)$ présente une $p^{\text{ème}}$ harmonique nulle.



Q16. Il faut coïncidence (autant que possible) entre une harmonique du do 2 et une autre note

Note	do2	do3	sol3	do4	mi4	sol4	si♭4	do5
réquence fondamentale (Hz)	130.8	261.6	392.0	523.3	659	784	932	1046.5

Harmonique n° X du do2	1	2	3	4	5	6	7	8
fréquence (Hz)	130,8	261,6	392,4	523,2	654	784,8	915,6	1046,4
Écart Δf (Hz) // à la note la + proche.	0	0,2	0,4	0,1	5	0,8	16,4	0,1

La 5ème et la 7ème harmoniques sont particulièrement dissonantes, c'est donc logique que ce soit celles que l'on souhaite annuler, surtout la 7ème qui est de loin la + dissonante.

allure de la 7ème harmonique.

en tapant ici, on imprègne une vitesse initiale non-nulle à la corde, on interdit donc à tout jamais l'existence d'un noeud à cet endroit puisque $g'(x) \neq 0$ à cet endroit, $\forall t$.