Éléments de correction : DS n°5

Q 1. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \text{avec}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(E(r)\,e^{i(\omega t - kr)}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$= -\left(\frac{dE}{dr} - ikE\right)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

donc $$\underline{\vec{B}} = \underbrace{\underline{\overrightarrow{C^{te}}}}_{} + \frac{1}{i\omega}\left(\frac{dE}{dr} - ikE\right)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta}$$

indep. de t, donc ne fait pas partie de l'onde,

donc $\overrightarrow{C^{te}} = \vec{0}$ quitte à superposer ce $\vec{B}$ comme une contribution statique.

Q 2. $$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Q 3. On n'oublie pas de repasser en réels avant de calculer $\vec{\Pi}$:

$$\vec{E} = E(r)\cos(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{et}$$

$$\vec{B} = \left[-\frac{k}{\omega}E(r)\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{\omega}\frac{dE}{dr}\sin(\omega t - kr)\right]\overrightarrow{u_\theta}$$

d'où $$\vec{\Pi} = \frac{E^2(r)\,k}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_r} - \frac{E}{\mu_0\omega}\frac{dE}{dr}\cos(\omega t - kr)\sin(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_r}$$

et $$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{\Pi}\,dt \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

or $$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2}\right)dt \quad \text{car } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2\omega t}{4T}\right]_0^T}_{0-0=0} = \frac{1}{2}$$

et $\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\sin(\omega t+\varphi)}_{u} \underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}_{\frac{u'}{\omega}} dt = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin^2(\omega t+\varphi)}{\omega} \right]_0^T = 0-0=0$

d'où $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E^2(r)k}{2\omega\mu_0} \vec{u_r}$ et $k = +\frac{\omega}{c}$ dans le vide.

($+$ d'après l'énoncé, $k>0, \omega>0$).

Q4. $P_{moy} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle . \vec{dS} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} r d\theta \langle \vec{\Pi} \rangle . \vec{u_r}$

$P_{moy} = \frac{h\pi r E^2(r)}{c\mu_0}$

Q5. Il ne peut pas y avoir dissipation d'énergie dans le vide, donc P_{moy} doit être indépendant de r, d'où $rE^2(r) = C^{te}$ et donc

$E(r) = \frac{\sqrt{C^{te}}}{\sqrt{r}}$, notons $E(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ avec

α en $V.m^{-1/2}$

Q6. Pour $r \gg \lambda$ on a $k = \frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{2\pi}{r}$, or

$\vec{B} = \frac{1}{i\omega}\left(\alpha r^{-3/2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - ik\frac{\alpha}{\sqrt{r}} \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_\theta}$

$= \frac{\alpha}{i\omega\sqrt{r}}\left(-\frac{1}{2r} - ik \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_\theta}$

notons $z = \frac{1}{2r} + ik$, $|z| = \sqrt{\frac{1}{4r^2} + k^2} \simeq k$

et $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\tan\theta = 2kr \to +\infty$ donc $\theta \to \frac{\pi}{2} [\pi]$

d'où $z \simeq +ik$ donc $\vec{B} = -\frac{\alpha k}{\omega\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_\theta}$

on a $\vec{B} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{c}$, c'est un trièdre direct localement, on retrouve la structure d'onde plane dans le vide.

Q7. On a $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ donc $c = \lambda f$ dans le vide (avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega = 2\pi f$) d'où $\lambda = \frac{3\times 10^8}{3\times 10^7} = 10\,m$

On a ici $r \simeq \lambda$, l'approximation n'est donc pas valable.

Problème 2 :

Q8. On a $\mu_1 \ll \mu_0$, $p \ll P_0$, et (au choix) $\|\vec{v}\| \ll c_{son}$, ou $\xi \ll \lambda$ ← longueur d'onde ou dist. carac. de variation de $\vec{v}$

ξ : déplacement ($v = \dot{\xi}$)

Q9. On a ici c_1 et c_2 mais pas d'informations concrètes sur $\frac{\partial P}{\partial \mu} = c^2$, donc on écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \\ P_1 = c^2 \mu_1 \end{cases}$$

Q10. L'impédance acoustique vaut par définition $Z_1 = \frac{p}{\vec{v}\cdot\vec{n}}$ dans le milieu 1, idem dans le milieu 2. En RSF on peut par ex. utiliser l'éq. de conservation de la masse linéarisée : $i\omega \frac{P_1}{c^2} - \mu_0 i k\, v_z = 0$ pour v et p deux OPPM se propageant selon $+\vec{e_z}$: $\frac{P_1}{v_z} = \mu_0 c$

donc $Z_1 = \rho_{01} c_1$ et $Z_2 = \rho_{02} c_2$

Q 11. Dans l'air $\rho_{01} = 1(,2)\ kg.m^{-3}$ $\quad Z_1 = 340\ kg.m^{-2}s^{-1}$

$c_1 = 340\ m.s^{-1}$

Dans l'eau $\rho_{02} = 10^3\ kg.m^{-3}$ $\quad Z_2 = 1,5\times10^6\ kg.m^{-2}s^{-1}$

$c_2 = 1,5\times10^3\ m.s^{-1}$

Q 12. voir cours.

PFD à l'interface $\Rightarrow$ $p_i + p_r = p_t$

non-miscible $\Rightarrow$ $v_i + v_r = v_t$

donc
$$\begin{cases} 1 + r = t \\ \dfrac{p_i}{Z_1} - \dfrac{p_r}{Z_1} = \dfrac{p_t}{Z_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \dfrac{Z_1}{Z_2} t \end{cases}$$

d'où $2 = \left(1 + \dfrac{Z_1}{Z_2}\right) t$ soit $\boxed{t = \dfrac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

et $\boxed{r = t - 1 = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$

Q 13. $R = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle . (-S\vec{u_z})}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle . (+S\vec{u_z})}$ $\quad T = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle . (S\vec{u_z})}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle . (S\vec{u_z})}$

avec $\vec{\Pi}_r = p_r \vec{v_r}$ $\quad \vec{\Pi}_t = p_t \vec{v_t}$ $\quad \vec{\Pi}_i = p_i \vec{v_i}$

Q 14. On a $\vec{\Pi}_r = -\dfrac{p_r^2}{Z_1}\vec{u_z}$ $\quad \vec{\Pi}_i = \dfrac{p_i^2}{Z_1}\vec{u_z}$

et $\vec{\Pi}_t = \dfrac{p_t^2}{Z_2}\vec{u_z}$ donc

$R = r^2 = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$ et $T = \dfrac{t^2 Z_1}{Z_2} = \dfrac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

Q 15. $Z_1 + Z_2 \simeq Z_2$ donc $T \simeq \dfrac{4 Z_1}{Z_2} = 4 \times 2\times10^{-4} = 8\times10^{-4}$

et $R = 1 - T \simeq 1$ $(0{,}9992)$, quasi toute l'onde est réfléchie à l'interface.

Q16. On a $m\ddot{z} = p_e S_e - p_i S_i - kz$

Q17. on a continuité de la vitesse du fluide sur l'étrier, donc $Z_{eau} = \dfrac{p_i}{\dot{z}}$

Q18. En RSF on a :

$$i\omega m \frac{p_i}{Z_{eau}} + p_i S_i + k \frac{p_i}{Z_{eau}\, i\omega} = p_e S_e$$

donc
$$\underline{G} = \frac{S_e}{S_i + \frac{1}{Z_e}\left(\frac{k}{i\omega} + mi\omega\right)} = \frac{H_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$H_0 = \frac{S_e}{S_i}$$

Q19. pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on a

$$|\underline{G}| = \frac{S_e}{S_i} = 20$$

Q20. $$T' = \frac{\frac{1}{Z_e} p_i^2}{\frac{1}{Z_a} p_e^2} = G^2 \times \frac{Z_a}{Z_e}$$, soit au

maximum $20^2 \times 2 \times 10^{-4} = 8 \times 10^{-2} = 0{,}08$, c'est 400 × mieux que sans l'oreille moyenne, c'est déjà ça de pris.