DS n° 6 : éléments de correction

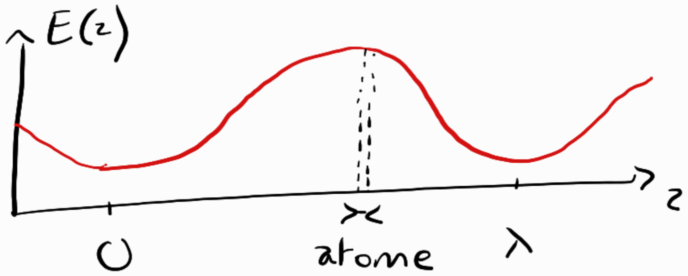
Q1. Prenons l'intervalle des λ visibles sur $[400\,nm ; 700\,nm]$, alors dans le vide $f = \frac{c}{\lambda}$

donc $f_{min} = \frac{3\times10^{8}}{7\times10^{-7}} \simeq 4,5\times10^{14}\,Hz$

$f_{max} = \frac{3\times10^{8}}{4\times10^{-7}} = 7,5\times10^{14}\,Hz$

Q2. L'odg de R est $10^{-10}\,m \ll 5\times10^{-7}\,m$

Localement, l'atome voit donc un



champ électromagnétique quasi-uniforme, ce qui revient à écrire $\vec{E}(z\pm R,t) \simeq \vec{E}(z,t) \pm R\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}(z,t) \simeq \vec{E}(z,t)$

avec $\frac{\|R\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{R}{\lambda} \ll 1.$

la valeur fixe de z sur le noyau

Q3. Le PFD appliqué au nuage électronique dans le ref du noyau s'écrit :

$$m\ddot{\vec{r}} = -Ze(\vec{E}_{ext} + \dot{\vec{r}}\wedge\vec{B}) - m\gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0^2\vec{r}$$

Q4. Comme pour un plasma, on évalue :

$A = \frac{\|\dot{\vec{r}}\wedge\vec{B}_{ext}\|}{\|\vec{E}_{ext}\|}$ avec, pour des OPPM $\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}_{ext} = \omega\,\underline{\vec{B}}_{ext}$

soit, en posant arbitrairement $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,e^{j(\omega t-\underline{k}z)}\vec{u_x}$

pour temporairement évaluer A, $\underline{\vec{B}}_{ext} = \frac{\underline{n}}{c}\underline{E_0}\,e^{j(\omega t-\underline{k}z)}\vec{u_y}$

puisque $\|\dot{\vec{r}}\wedge\vec{B}_{ext}\| \leq \dot{r}B_{ext}$, dans le cas le plus optimiste où A serait maximal on a

$A \leq \frac{\dot{r}}{c}$ car $n \simeq 1$ l'indice optique du vide pour cette question. On en déduit que l'effet de $\vec{B}_{ext}$ est négligeable devant l'effet de $\vec{E}_{ext}$ sur le mvt tant que $\frac{\dot{r}}{c} \ll 1$, càd on suppose le mvt non relativiste.

Q5. pour N charges ponctuelles aux pts M_i de charges q_i, $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{O'M_i}$ avec O' un pt quelconque. (O'≡N serait ok)

ici prenons O'≡O (origine pour $\overrightarrow{OM_i}$) centre du nuage e⁻ d'après l'énoncé

$$\vec{p}_i = -Ze \times \vec{0} + Ze\,\overrightarrow{ON} = -Ze\,\vec{r}.$$

Q6. $\vec{P} = \frac{d\vec{p}_i}{d\tau} = n\,\vec{p}_i$ d'où en RSF

$$\underline{\vec{P}} = -Zen\,\underline{\vec{r}} \quad \text{où} \quad \underline{\vec{r}}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \gamma j\omega\right) = -\frac{Ze}{m}\underline{\vec{E}}_{ext}$$

soit $$\underline{\vec{P}} = \frac{\frac{Z^2e^2n}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}\,\underline{\vec{E}}_{ext} \quad \text{et} \quad \omega_p^2 = \frac{Z^2e^2n}{m\,\varepsilon_0}$$

Q7. Le choix de l'origine des temps n'a pas encore été fixé

Q8. MF : $\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\,\underline{\vec{B}}$ MT $\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$

MG $-j\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho_{lié}}{\varepsilon_0}$ MA $-j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}}_{lié} + \frac{j\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

$$\left.\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega\,\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{k}}(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}}) - \underline{k}^2\underline{\vec{E}} \right\} \times -j \quad \& \text{ MA}$$

$$\omega\mu_0\underline{\vec{j}}_{lié} + j\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{k}}\,\frac{\rho_{lié}}{\varepsilon_0} + j\underline{k}^2\underline{\vec{E}}$$

or $\frac{\partial \rho_{lié}}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}_{lié}) = 0$ avec $\mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_{lié}$

d'où $\vec{j}_{lié} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ donc en RSF $\underline{\vec{j}_{lié}} = j\omega \underline{\vec{P}}$

et $\rho_{lié} = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ devient en RSF $\underline{\rho_{lié}} = j\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{P}}$

d'où $-j\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\times j\underline{\vec{k}}\cdot\varepsilon_0(\underline{\varepsilon_r}-1)\underline{\vec{E}}$ et, pour

$\underline{\varepsilon_r} \neq 0$ ($\forall \omega \in \mathbb{R}^+$ c'est en effet le cas),

$\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$ d'où :

$j\omega^2\mu_0\underline{\vec{P}} + j\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0} + j\underline{k}^2\underline{\vec{E}}$ soit :

$$\boxed{\omega^2\mu_0\varepsilon_0(\underline{\varepsilon_r}-1) + \frac{\omega^2}{c^2} = \underline{k}^2}$$

Q 9. Calculons $\vec{\Pi}$: $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - k'z)e^{-k''z}\vec{u_x}$

$k'>0$ car l'onde se propage selon $z\uparrow$

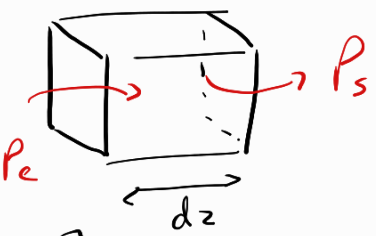
$\omega\vec{B} = \vec{k}\wedge\vec{E}$ avec

$\omega\vec{B} = E_0 e^{-k''z}\left[k'\cos(\underbrace{\omega t - k'z}_{X}) + k''\sin(\omega t - k'z)\right]\vec{u_y}$

$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2 e^{-2k''z}}{\mu_0\omega}\left[k'\cos^2(X) + k''\cos X\sin X\right]\vec{u_z}$

$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega}e^{-2k''z}k'\vec{u_z}$

Q 10. Déterminons la puissance moy. absorbée P_{abs} par le système :



$P_{abs} = P_e - P_s = \left[\langle\vec{\Pi}\rangle(z) - \langle\vec{\Pi}\rangle(z+dz)\right]S\cdot\vec{u_z}$

($\langle\vec{\Pi}\rangle$ sort de l'$\iint$ car fct° de z uniquement, indep. de x & y)

$P_{abs} = -S\,dz\times\frac{d\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{u_z}}{dz} = 2S\,dz\,k''\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{u_z}$ d'où

$P_{vol\,abs} = 2k''\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{u_z} = \frac{E_0^2 k'k''}{\mu_0\omega}e^{-2k''z}$

Q11. $\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c}$ avec ici $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$ car propag. $z \nearrow$

Q12. $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}$ donc, avec $\omega = \omega_0$ & $\frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0} \gg 1$:

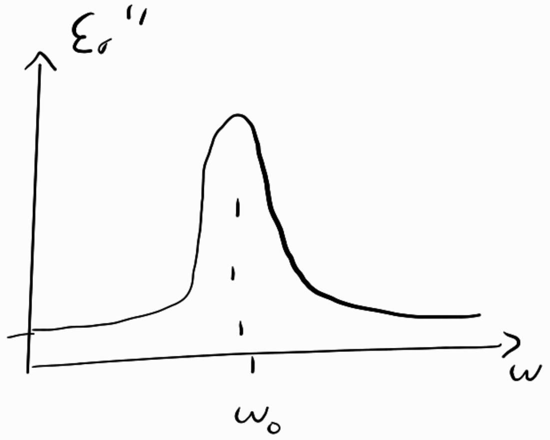
$n'^2 - n''^2 - 2j n' n'' = \varepsilon_r' - j \varepsilon_r''$

avec $\varepsilon_r' = 1$ et $\varepsilon_r'' = \frac{\gamma \omega_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 \gamma^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma} \gg 1$ d'où

$\underline{\varepsilon_r} \simeq -j \varepsilon_r''$ et $\begin{cases} n' = \pm n'' \\ \pm 2 n''^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma} > 0 \end{cases}$ → donc $n' = +n''$ $\quad n'' = \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2 \omega \gamma}}$

or $n' > 0$ car $k' > 0$ d'où $n'' = +\sqrt{\frac{\omega_p^2}{2 \omega \gamma}}$ et

$n' = + n''$



Q13. On a vu dans le cours que $P_{\text{Joule,vol}} \propto -\text{Im}(\underline{\varepsilon_r})$

or ε_r'' est max. en $\omega = \omega_0$, donc le rubis absorbe $\omega = \omega_0 = 5 \times 10^{15}$ rad/s, ce qui correspond à

$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ donc $\lambda_0 = \frac{6{,}3 \times 3 \times 10^8}{4 \times 10^{15}} \simeq 4{,}7 \times 10^{-7}$ m

soit du bleu est absorbé. Le rouge et le vert passent donc et le rubis apparait jaune. Dire que 470 nm est proche du vert aussi et que seul le rouge passe, pour un rubis rouge est ok.

Q14. $\vec{E}$ tangente est tjrs $\mathcal{C}^0$ et $\vec{js} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{B}$ $\mathcal{C}^0$ à l'interface d'où :

$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} & (\mathcal{C}^0 \ \underline{\vec{E}} \text{ en } z=0) \\ 1 - \underline{r} = \underline{t}\,\underline{n} & (\mathcal{C}^0 \ \underline{\vec{B}} \text{ via M.F., + en } z=0) \end{cases}$

donc $\underline{t} = \dfrac{2}{1+\underline{n}}$ et $\underline{r} = \underline{t} - 1 = \dfrac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$

Q15. $R = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot -\vec{u_z}}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u_z}}$, en $\underline{\underline{z=0}}$

et $T = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{u_z}}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u_z}}$ en $= 0$.

notons $\underline{r} = r' - jr''$ et $\underline{t} = t' - jt''$, alors en $z=0$

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{1}{\mu_0} E_0(r'\cos\omega t + r''\sin\omega t)\frac{E_0}{c}(r'\cos\omega t + r''\sin\omega t)\vec{u_z}$$

d'où $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\dfrac{r'^2 + r''^2}{2\mu_0 c} E_0^2 \vec{u_z} = |\underline{r}|^2 \langle \vec{\Pi}_i \rangle$

$$R = |\underline{r}|^2 = \frac{(1-n')^2 + n''^2}{(1+n')^2 + n''^2}$$

$\underline{t}$ $\underline{n}$ $\underline{E}$

De m̂, $\vec{\Pi}_t = \dfrac{1}{\mu_0} E_0(t'\cos\omega t + t''\sin\omega t)\dfrac{E_0}{c}\left[(t'n' - t''n'')\cos\omega t + (t''n' + t'n'')\sin\omega t\right]\vec{u_z}$

$$= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\underbrace{\left[t'(t'n' - t''n'') + t''(t''n' + t'n'')\right]}_{= t'^2 n' + t''^2 n'}\vec{u_z}$$

donc $T = n'|\underline{t}|^2 = \dfrac{4n'}{(1+n')^2 + n''^2}$

T ne dépend pus de z, mais n'est valable qu'en $z=0$. Au-delà, la puissance volumique absorbée diminue la puissance surfacique moyenne au fur et à mesure que $z \nearrow$, cf Q10.

Q16. $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

avec en sphériques $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p} = = -\frac{\omega^2 e^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{ext}(\underbrace{t-\frac{r}{c}}_{t'})$

donc $\ddot{\vec{p}} = -\frac{\omega^2 e^2}{m\omega_0^2} \underline{E_0} e^{j\omega t'} \vec{u_z}$ d'où

$$\ddot{\vec{p}} \wedge \vec{OM} = -\frac{\omega^2 e^2}{m\omega_0^2} \underline{E_0} e^{j\omega t'} \times r \underbrace{(\vec{u_z} \wedge \vec{u_r})}_{\sin\theta \, \vec{u_\varphi}}$$

et $(\ddot{\vec{p}} \wedge \vec{OM}) \wedge \vec{OM} = -\frac{\omega^2 e^2}{m\omega_0^2} \underline{E_0} e^{j\omega t'} r^2 \sin\theta \, \vec{u_\theta}$

donc $\underline{\vec{E}}(M,t) = -\frac{\omega^2 e^2 \sin\theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r m \omega_0^2} \underline{E_0} e^{j\omega t'} \vec{u_\theta}$

et $\underline{\vec{B}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 e^2}{m\omega_0^2} \underline{E_0} e^{j\omega t'} \frac{\vec{u_z} \wedge r\vec{u_r}}{c r^2} = -\frac{\mu_0 \omega^2 e^2 \sin\theta}{4\pi m \omega_0^2 c r} \underline{E_0} e^{j\omega t'} \vec{u_\varphi}$

d'où $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{|\underline{E_0}|^2 \omega^4 e^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 \underbrace{\varepsilon_0 c^2}_{1/\mu_0} c r^2 m^2 \omega_0^4} \times \frac{1}{2} \vec{u_\theta} \wedge \vec{u_\varphi}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 e^4 |\underline{E_0}|^2}{32\pi^2 r^2 m^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \sin^2\theta \, \vec{u_r}$$

Q17. $\langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u_z} = 0$ car $\sin\theta = 0$

Q18. $\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cancel{r^2} \sin\theta \, d\theta \times \underbrace{\frac{\mu_0 e^4 |\underline{E_0}|^2}{32\pi^2 m^2 c \cancel{r^2}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}_{A} \sin^2\theta$

$$= A \times 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \times \frac{\mu_0 e^4 |\underline{E_0}|^4}{32\pi^2 m^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

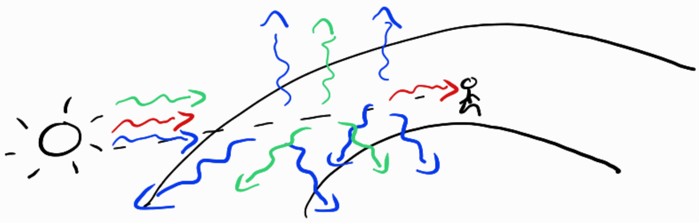
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 e^4 |\underline{E_0}|^4}{12\pi m^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

Q19. $\langle P \rangle \propto \omega^4$, donc, en prenant simplement

$\omega_{rouge} \simeq \frac{1}{2} \omega_{bleu}$, $\langle P_{bleu} \rangle = \underset{\overset{\shortparallel}{16}}{2^4} \langle P_{rouge} \rangle$

Les dipôles atomiques dans l'air de l'atmosphère émettent donc en puissance 16 × plus dans le bleu que dans le rouge, et donc que la lumière émise soit bleue essentiellement.

Q20. Les radiations rouges sont les moins diffusées par le matériau, après une forte épaisseur d'atmosphère il ne reste donc que les photons



non préalablement difusés, càd les photons rouges.