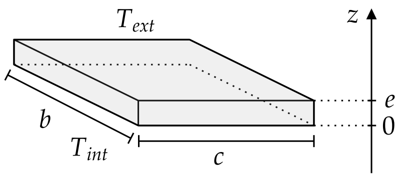
Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque sous-partie. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Exercice : Thermique du manchot
(33% des pts)

On considère un matériau homogène de conductivité thermique λ, masse volumique μ et capacité thermique massique c, en forme de pavé droit compris entre $z = 0$ et $z = e$. On note $T(z)$ la température du matériau et le problème est supposé stationnaire. La température sur la portion $z \geq e$ est uniforme et égale à T_{ext}, tandis que la température sur $z \leq e$ est égale à T_{int}. On considère la diffusion thermique comme seul mode de transfert thermique.



Q1. Rappeler sans démonstration l'expression de la loi de Fourier, ainsi que dans le cas général l'expression de l'équation locale de conservation de l'énergie interne.

Q2. En détaillant votre raisonnement, déterminer le profil de température $T(z)$ pour $z \in [0; e]$.

Q3. Rappeler l'expression littérale reliant la puissance thermique P_{th} traversant une surface S au vecteur densité de puissance thermique $\overrightarrow{j}_{th}$.

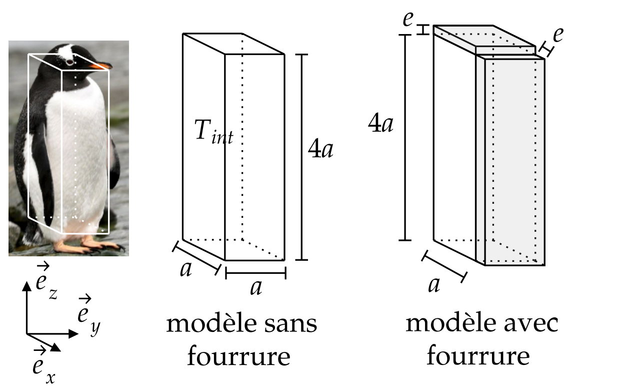
Q4. En justifiant rigoureusement, déterminer l'expression de la puissance thermique P_{th} traversant la surface $S = b \times c$, P_{th} étant comptée positivement dans le sens des z croissants.

Q5. Définir la résistance thermique R_1 de ce matériau, puis l'exprimer en fonction de λ, e, b et c.

Ce matériau modélise la couche de graisse + plumes isolant les manchots du froid.

On modélise un manchot sans son plumage comme un pavé droit de volume $V = 4a^3$ et de température uniforme T_{int}, maintenue constante grâce à son métabolisme fournissant une puissance totale P.

On modélise le plumage comme six couches planes de matériau isolant (le schéma n'en montre que deux), tous des pavés droits de conductivité thermique λ comme décrit précédemment. On suppose $e \ll a$ de sorte à ce qu'il ne soit pas nécessaire de considérer les volumes de plumage dépendant proportionnels à ae^2 et e^3. La température de l'air extérieur au contact du plumage est T_{ext} (on considère une éventuelle couche limite comme d'épaisseur quasi-nulle) et on reste en régime stationnaire.



Q6. En justifiant votre démarche, proposer un circuit électrique analogue à la situation du manchot avec son plumage. On y fera figurer T_{int}, T_{ext}, P, et on donnera l'expression littérale en fonction de λ, a et e de toute résistance thermique intervenant sur le schéma.

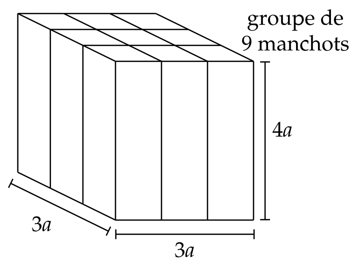
On a $P = 50$ W, $e = 1$ cm, $a = 10$ cm, $T_{int} = 37$ °C et $T_{ext} = -13$ °C.

Q7. Déterminer la valeur numérique de la conductivité thermique. Quelle que soit la valeur numérique obtenue on prendra $\lambda = 0,1$ K^{-1}.W.m^{-1} pour la suite.

Pour lutter contre le froid, 9 manchots se regroupent, formant un pavage carré parfait.

Q8. Exprimer la puissance métabolique totale P' que doit apporter le groupe de manchots pour maintenir leur température T_{int} dans cette nouvelle configuration.

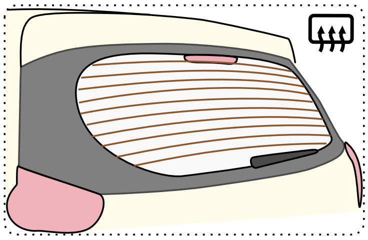
Q9. Déterminer la valeur du rapport $\frac{P'}{9P}$. Commenter le résultat obtenu.



II - Exercice : Désembuage automobile

(33% des pts)

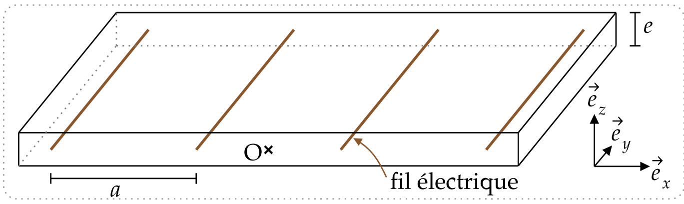
À l'arrière des voitures, on peut observer des fins fils horizontaux bruns au-travers de la vitre arrière. À l'enclenchement du bouton "désembuage", ces fils sont parcourus par un courant électrique, dégageant une énergie thermique par effet Joule.

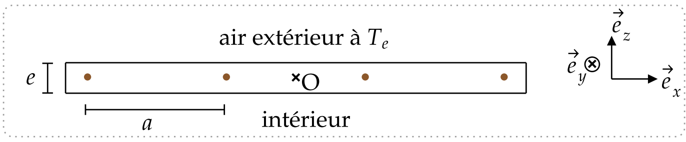


On note μ la masse volumique, λ la conductivité thermique et c la capacité thermique massique de la vitre. Chacune de ces grandeurs est uniforme dans la vitre.

On suppose que :

- Les fils électriques infiniment fins sont infiniment longs selon $(\mathrm{O}y)$, donc T ne dépend pas de y.
- Il y a une succession infinie de fils dans la direction $(\mathrm{O}x)$ séparés d'une distance a, l'origine O étant choisie au milieu de deux fils.
- e est suffisamment faible pour négliger la dépendance de T par rapport à z.
- On néglige les échanges thermiques entre la vitre et l'air intérieur ($h_i = 0$). Les échanges thermiques entre la vitre et l'air extérieur sont pris en compte et quantifiés par le coefficient $h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1}, car la voiture est en train de rouler.





Q10. Exprimer et nommer la loi décrivant le transfert thermique à l'interface en $z = +\frac{e}{2}$. On précisera les points d'application de toute fonction de l'espace impliquée dans l'expression.

Q11. Démontrer, en justifiant rigoureusement, que la température $T(x,t)$ à l'intérieur de la vitre vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\mu e c}$$

Q12. Comment appelle-t-on le coefficient D ? L'exprimer en fonction des données du problème, puis rappeler son unité.

On se place dans un premier temps en régime stationnaire, le désembuage étant enclenché. Chaque fil électrique dissipe une puissance P_L **par unité de longueur** de fil électrique.

Q13. Déterminer l'expression de $T(x)$ pour $x \in \left]-\frac{a}{2};+\frac{a}{2}\right[$ en fonction de P_L, $b = \sqrt{\frac{e\lambda}{h_e}}$, a, h_e, e et λ.

La pression partielle en vapeur d'eau dans l'habitacle est de $1{,}7\times10^3$ Pa. Il se trouve que 2400 Pa est également la pression de vapeur saturante de l'eau à $T_{vap} = 283$ K : $P_{sat}(T = 283\mathrm{K}) = 1,7 \times 10^3$ Pa.

Q14. En déduire que la puissance linéique minimale $P_{L\,min}$ nécessaire pour assurer en régime stationnaire le désembuage en tout point de la vitre est :

$$P_{L\,min} = 2\sqrt{h_e e \lambda}(T_{vap} - T_e)\sinh\left(\frac{a}{2b}\right)$$

On donne $a \simeq 2b$ et $e^1 \simeq 2,7$.

Q15. En précisant soigneusement votre démarche, indiquer l'ordre de grandeur de la puissance **totale** P consommée par le système de désembuage de la vitre arrière d'une voiture typique. Commenter le résultat en comparaison de l'ordre de grandeur de la puissance mécanique fournie par une voiture typique.

On étudie maintenant l'évolution spatiale et temporelle de la température une fois le chauffage éteint, l'extinction ayant lieu à la date $t = 0$. Pour $t \leq 0$ le profil de température était le profil de température en régime stationnaire. Le profil de température se généralise alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ sous la forme :

$$T(x,t) = T_e + \frac{P_L}{h_e a}\left[F_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times (-1)^n}{1 + \left(\frac{2\pi n d}{a}\right)^2} F_n(t) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right] \qquad \text{avec } F_n(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Q16. Déterminer explicitement l'expression des fonctions $F_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de D, n, a, h_e, μ, e et c.

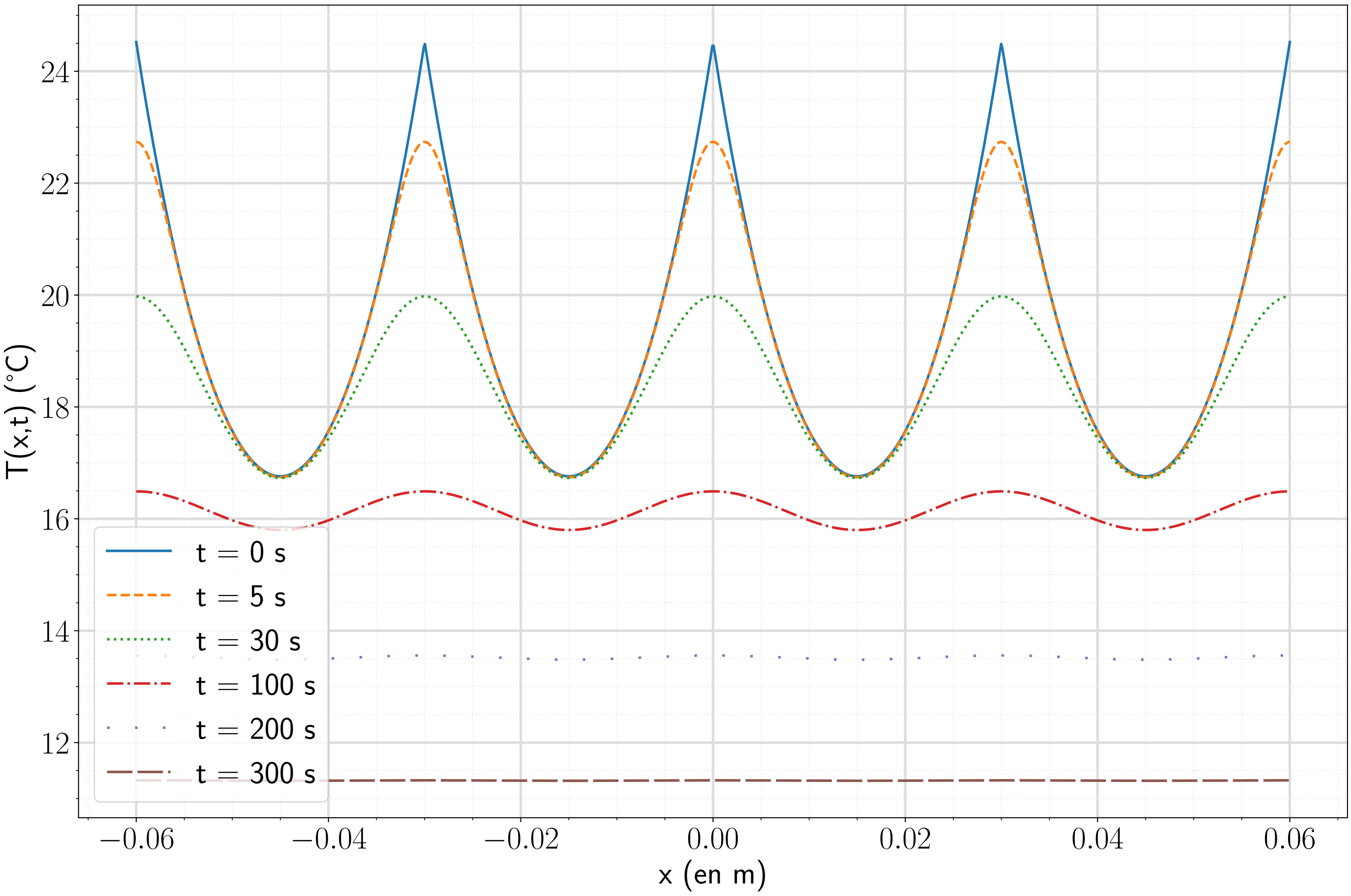


Fig. 1 – Profil de température à différents instants, à partir de $t = 0$ lorsque le désembuage est désactivé.

Q17. Mettre en évidence deux temps caractéristiques dont on donnera le sens physique ainsi que l'expression littérale.

On donne $\mu = 2700$ kg.m^{-3}, $c = 800$ J.K^{-1}.kg^{-1}, $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}, $e = 6$ mm et $h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1}.

Q18. Donner, avec un seul chiffre significatif, les valeurs numériques de ces deux temps caractéristiques. Commenter au vu du graphique tracé.

Éléments de correction : DS n°7

Q1. $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$ la loi de Fourier et, en présence d'une éventuelle puissance volumique créée $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}(\overrightarrow{j_{th}}) + P_{vcr}$ l'eq. locale de conservation de l'énergie interne.

Q2. $P_{vcr} = 0$ d'après l'énoncé, et nous sommes en régime stationnaire donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

$T(z) \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ d'où, en intégrant 2 fois

$T = \alpha z + b$ soit $T(z) = T_{int} + \frac{T_{ext} - T_{int}}{e} z$, valable pour $z \in [0; e]$.

Q3. $P_{th} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$

Q4. D'après l'énoncé $\overrightarrow{dS} = + dS \vec{e_z}$ avec

$$P_{th} = \underbrace{\int_0^b dx \int_0^c dy}_{\text{rien n'impose pour le moment les axes } x \text{ et } y} \overrightarrow{j_{th}} \cdot \vec{e_z} = \int_0^b dx \int_0^c dy \times -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

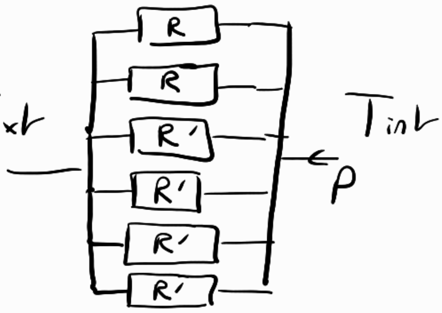
or $T(z) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial z}(z) \Rightarrow P_{th} = -\lambda bc \times \frac{T_{ext} - T_{int}}{e}$

donc $P_{th} = \frac{\lambda bc}{e} (T_{int} - T_{ext})$

Q5. $R_1 = \frac{e}{\lambda bc}$, avec $P_{th} R_1 = T_{int} - T_{ext}$

Q6. Les 6 couches d'isolant sont chacunes placées entre T_{int} et T_{ext}, et sont donc en parallèle. De plus, les couches hautes et basses ont chacune une résistance thermique $R = \frac{e}{\lambda a^2}$. Les couches latérales $R' = \frac{e}{4\lambda a^2}$ d'où $R_{eq} = \frac{1}{\frac{\lambda a^2}{e}(2 + 4 \times 4)}$

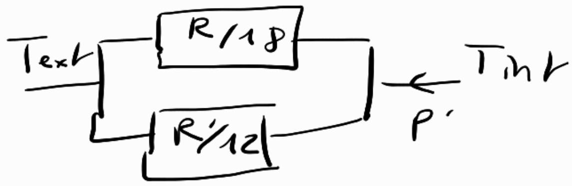
$R_{eq} = \frac{e}{\lambda a^2} \times \frac{1}{18}$



Q7. On a $T_{int} - T_{ext} = R_{eq} P$ d'où

$$\lambda = \frac{eP}{18\, a^2 (T_{int} - T_{ext})} = \frac{10^{-2} \times 50}{18 \times 10^{-2} \times 50} = \frac{1}{18} \simeq 0{,}05\ W.m^{-1}.K^{-1}$$

Q8. Désormais



(on s'est épargé le tracé de 30 résistances en //) d'où

$$P' = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{eq}'} \quad \text{avec} \quad R_{eq}' = \frac{1}{(12 \times 4 + 18)\frac{\lambda a^2}{e}}$$

soit $R_{eq}' = \frac{e}{\lambda a^2} \times \frac{1}{66} = \frac{10^{-2}}{5 \times 10^{-4} \times 66} \simeq \frac{100}{5 \times 66} = 0{,}3\ K.W^{-1}$

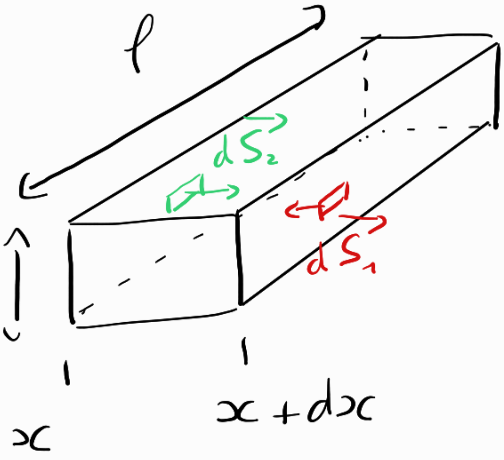
donc $P' = \frac{50}{0{,}3} \simeq 160\ W$

Q9. $\frac{P'}{9P} = \frac{160}{450} \simeq \frac{1}{3}$, Cette nouvelle configurat° permet au groupe d'économiser les 2/3 de son énergie.

Q10. Il s'agit de la loi de Newton :

$$\vec{j_{th}}\left(z=+\frac{e}{2}, x, t\right) = h_e\left[T\left(z=+\frac{e}{2}, x, t\right) - T_e\right]\vec{e_z}$$

Q11. On applique le 1er ppe de la thermodynamique au système de longueur ℓ selon (Oy) et e situé entre x et $x+dx$, dans le référentiel attaché à la voiture



On a alors :

$$\underbrace{dE_{mecn}}_{=0,\ \text{immobile}} + dU = \underbrace{\delta W}_{\varphi\ \text{condensée incompressible}} + \delta Q$$

avec

$$\delta Q = \left[P_{th_e}(x,t) + P_{th_e}(x+dx,t) \overbrace{- \ell\, dx\, h_e(T(x,t) - T_e)}^{\text{compté reçu d'où le } \ominus}\right] dt$$

et $dU = U(t+dt) - U(t) = dx\, e\, \ell\, \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\, dt$

or $P_{th_e}(x+dx,t) = \iint \vec{j_{th}}(x+dx,t) \cdot \underbrace{-dS\vec{e_x}}_{d\vec{S_1}}$ et

$$P_{th}(x,t) = \iint \vec{j_{th}}(x,t) \cdot \underbrace{dS\vec{e_x}}_{d\vec{S_2}} \quad \text{d'où}$$

$$\rho c e \ell \frac{\partial T}{\partial t} = -\ell h_e(T - T_e) - \frac{\partial j_{thx}}{\partial x} e \ell$$

or $\vec{j_{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{e_x}$ d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{D} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\rho c e}(T_e - T)$$

Q12. D est le coefficient de diffusion thermique, avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ en m^2/s

Q13. Localement on a désormais

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\rho e c}(T_e - T) = 0$$ en régime stationnaire,

vrai sur $\left]-\frac{a}{2} ; \frac{a}{2}\right[$ puisqu'il n'y a pas de terme source. (seulement en $\frac{a}{2}$ $[a]$).

D'où, en posant $\theta = T - T_e$ et $b^2 = \frac{\rho e c}{h_e} D = \frac{\lambda e}{h_e}$

on obtient $\theta = A e^{-x/b} + B e^{x/b}$

donc $T = T_e + A e^{-x/b} + B e^{x/b}$ or $T(x) = T(-x)$ $\forall x$

donc $A = B$ (prendre $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$)

d'où $T = T_e + 2A \operatorname{ch}\left(\frac{x}{b}\right)$.

De plus $\vec{j_{th}} = -\frac{2A\lambda}{b} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{b}\right)\vec{e_x}$.

Or on peut faire un $\underbrace{\text{bilan}}_{\text{appliquer le 1er ppe}}$ entre $x = \frac{a}{2} - \frac{dx}{2}$

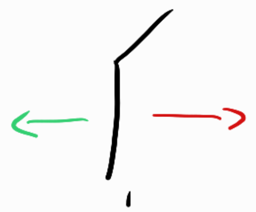
et $x = \frac{a}{2} + \frac{dx}{2}$; en régime stationnaire :

$$0 = \underbrace{P_L \times \ell}_{\text{valeur finie}} - \underbrace{h_e \ell \, dx \left(T\left(\tfrac{a}{2}\right) - T_e\right)}_{\text{infinitésimal}} + \ell e j_{thx}\left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{dx}{2}\right) - \ell e j_{thx}\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{dx}{2}\right)$$

pour $dx \to 0$, or $j_{thx}\left(\frac{a}{2} + \frac{dx}{2}\right) = -j_{thx}\left(\frac{a}{2} - \frac{dx}{2}\right)$

par symétrie, d'où

$P_L \times \ell = -2 \ell e j_{thx}\left(\frac{a}{2} - \frac{dx}{2}\right)$



$\frac{a}{2}$

donc $j_{th x}\left(\frac{a}{2}^-\right) = -\frac{P_L}{2e}$

soit $-\frac{2A\lambda}{b}\, sh\left(\frac{a}{2b}\right) = -\frac{P_L}{2e}$ d'où

$$T = T_e + \frac{P_L b}{2e\lambda\, sh\left(\frac{a}{2b}\right)}\, ch\left(\frac{x}{b}\right)$$

Q14. Le minimum de $T(x)$ est en $x = 0$ (min. de $ch(x)$) d'où $T_{min} = \frac{P_L b}{2e\lambda\, sh\left(\frac{a}{2b}\right)} + T_e$ et pour

$P_L = P_{L\,min}$ alors $T_{vap} - T_e = \frac{P_{L\,min}\, b}{2e\lambda\, sh\left(\frac{a}{2b}\right)}$

et $\frac{e\lambda}{b} = e\lambda \times \sqrt{\frac{h_e}{e\lambda}} = \sqrt{e\lambda h_e}$ $\square$

Q15. Prenons comme sur le schéma 10 fils, chacun de 2m de long, alors $P = 20\, P_L$

or $P_{L\,min} = 2 \times \sqrt{23 \times 6 \times 10^{-3} \times 1} \times 40 \times \underbrace{\frac{e^{1} - e^{-1}}{2}}_{\simeq 1,2}$

$\simeq \frac{12 \times 12 \times 8}{30} = \frac{12 \times 4 \times 8}{10} \simeq 40\,W$

$P_{L\,min} \ll \underline{50\,kW}$ (1kW ≃ 1 cheval de tract°)

odg de la puissance motrice d'une petite voiture

c'est plutôt rassurant, allumer le désembuage ne gêne pas tant le moteur.

Q16. Cette équat° est solut° de l'équat° de diffusion d'où, avec $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\mu e c}(T_e - T)$:

$$\frac{P_L}{h_e a}\left[F_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\times(-1)^n}{1+\left(\frac{2\pi n d}{a}\right)^2} F_n'(t)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right] = -D\frac{P_L}{h_e a}\left[F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\times(-1)^n}{1+\left(\frac{2\pi n d}{a}\right)^2} F_n(t)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right]$$

$$\dots \times \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{P_L}{\mu e c a}\times\left[F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\times(-1)^n}{1+\left(\frac{2\pi n d}{a}\right)^2} F_n(t)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right]$$

vrai $\forall x$, on utilise la décompositᵒ unique en série de Fourier pour en déduire que :

$$\frac{P_L}{h_e a} F_n' = -\frac{D P_L}{h_e a} F_n \times \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{P_L}{\mu e c a} F_n$$

soit $F_n' = -\underbrace{\left(D\times\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{h_e}{\mu c e}\right)}_{1/\tau_n} F_n$

$$F_n = F_n(0)e^{-t/\tau_n} = e^{-t/\tau_n}$$

Q17. $\tau_n = \dfrac{1}{\frac{4\pi^2 n^2}{a^2}D + \frac{h_e}{\mu c e}}$

si $n \gg 1$ suffisamment, $\frac{4\pi^2 n^2}{a^2}D$ domine, $\tau' = \frac{a^2}{4\pi^2 n^2 D}$

sinon $\tau = \frac{\mu c e}{h_e}$ domine.

$\frac{a}{n}$ est la période spatiale du mode n,

$\tau' \sim \frac{L^2}{D}$ est alors la durée caractéristique de diffusion th. dans le verre.

$\tau = \frac{\mu c \Delta T e \, \ell dx}{h_e \Delta T \, \ell dx}$ est le temps carac.

nécessaire pour que la puissance thermique fuyant par conducto-convect° dissipe l'énergie interne stockée localement vis-à-vis de l'air extérieur.

Q18. $t = \frac{\rho c e}{h_e}$

$\tau = \frac{2700 \times 800 \times 6 \times 10^{-3}}{23}$

$= \frac{2,7 \times 4800}{23} \simeq \cancel{500}$ $600\,s$

$\tau' = \frac{a^2}{4\pi^2 n^2 D}$ → quasi nul pour les modes de n élevé donc de faible λ, donc se diffusent, s'étalent vite (normal, faible dist. à parcourir).

$\tau' = \frac{9 \times 10^{-4}}{4 \times 9\, D\, n^2}$

$a = 3\,cm$ par lecture graphique,

et $D = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{1}{2700 \times 800} \simeq 5 \times 10^{-7}\,m^2/s$

donc $\tau' = \frac{10^{-4}}{2 \times 10^{-6} n^2} = \frac{50}{n^2}\,s$

Interprétat°: les modes de fourier à n élevé ($\lambda = \frac{a}{n}$ faible) sont exponentiellement atténués en 1er avec $\tau_n \simeq \tau_1$ potentiellement très court.

Ensuite, à temps long seul $f_0(t)$ quasiment perdure, car de $\tau_0 = \tau = 600\,s$ plus lent, lentement décroissante jusqu'à $T = T_e$.