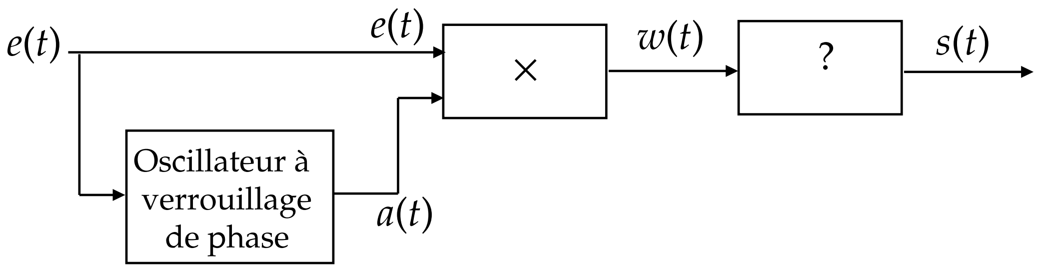
Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Les sous-parties sont en grande partie indépendantes. L'annexe est à séparer et à rendre avec votre copie. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Problème 1 : Démodulation stéréo.

La radio FM est diffusée via des ondes électromagnétiques sur la plage de fréquences entre 87,5 MHz et 107 MHz. Le signal sonore à transmettre est modulé en fréquence. On cherche à fabriquer un démodulateur radio.

On considère le signal modulé en fréquence $e(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_m(t)t\right]$ avec $f_m(t) = f_0 + \alpha\frac{\cos(2\pi f t)}{t}$ en supposant $2\pi\alpha f \ll f_0$ et $f \ll f_0$. En sortie de l'oscillateur à verrouillage de phase, on obtient un signal de tension $a(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

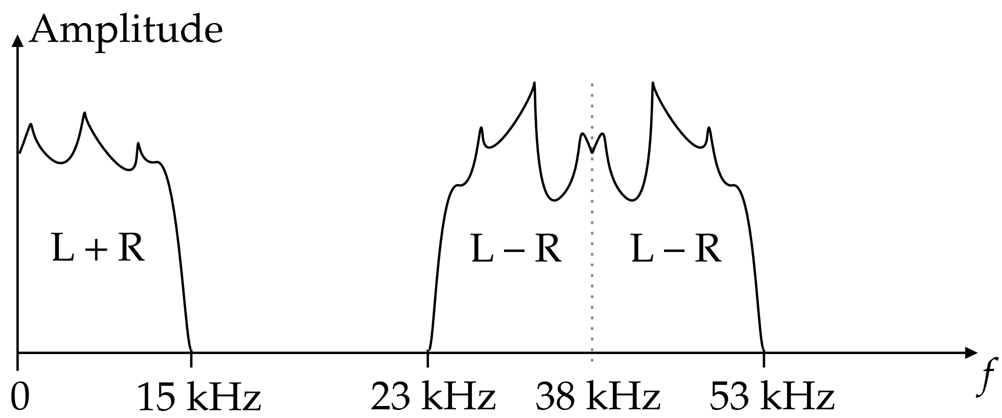
Q1. Rappeler la définition de la fréquence instantanée, puis calculer la fréquence instantanée du signal modulé $e(t)$.



Q2. Exprimer $w(t)$ de manière à faire apparaître les différentes bandes de fréquence de son spectre.

Q3. En déduire que le montage ci-dessus permet de retrouver le signal utile de fréquence f, en précisant le cahier des charges du dernier bloc " ?".

Q4. On observe que le signal $s(t)$ obtenu en sortie du démodulateur de fréquence est en fait composé de 2 signaux :



Le son transmis est en stéréophonie, L représente le son de gauche et R le son de droite. Proposer un montage permettant de reconstruire le signal L du canal de gauche et le signal R du canal de droite.

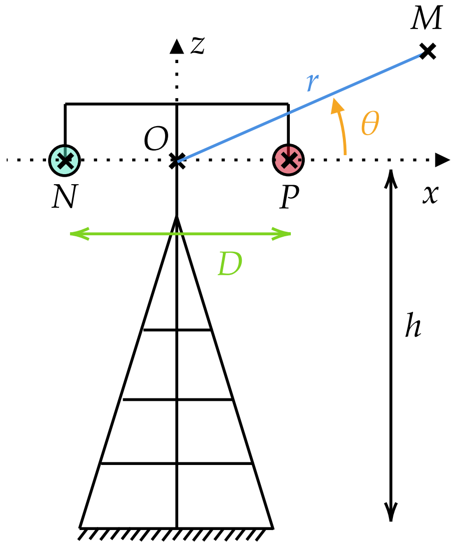
On attendra :

- Un schéma-bloc du montage
- les détails de la méthode de démodulation choisie
- les fréquences de coupure des filtres

Toute démarche, même incomplète, sera valorisée

II - Problème 2 : Champ électrique près d'une ligne haute tension.

On étudie ici le champ électrique à proximité d'une ligne électrique très haute tension.



Pour simplifier les calculs, on ne considère qu'une ligne monophasée, constituée de deux câbles N et P cylindriques parallèles, supposés de longueurs infinies, de rayons identiques R et séparés d'une distance D grande devant R.

On modélise la ligne électrique d'un point de vue électrostatique. À chaque instant, les tensions entre les deux câbles sont opposées, et on note V_0 le potentiel du câble P.

Du fait de l'inégalité $D \gg R$, on admet que la charge linéique du câble P a pour expression $\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)}$, le câble N portant une charge opposée à celle de P.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées polaires (r, θ), l'origine O étant placée au milieu de N et P.

Q5. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss ainsi que le théorème de Gauss pour l'électrostatique.

Q6. On considère dans un premier temps uniquement le fil infini situé en P, de charge linéique λ. Démontrer, en détaillant les étapes de votre raisonnement, que le champ électrique créé en un point M par ce fil vaut : $\overrightarrow{E_P}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^2}$.

Q7. Calculer le potentiel $V(M)$ créé au point M par le câble P seul en fonction de λ, de PM et de ε_0 et d'une constante.

Q8. Exprimer le potentiel électrique $V(r, \theta)$ créé au point M par la ligne électrique constituée des deux câbles (on fixera arbitrairement le potentiel nul à l'infini).

Q9. Montrer que pour $r \gg D$ (approximation dipolaire), le potentiel peut s'écrire de manière approchée $V(r, \theta) \simeq \frac{\lambda D \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

Q10. Exprimer les composantes radiale et orthoradiale du champ électrique à grande distance de la ligne électrique. En déduire la norme du champ électrique et commenter sa dépendance vis-à-vis de r et de θ.

On considère une ligne THT ayant les caractéristiques suivantes : $V_0 = 400$ kV, $D = 5$ m, $R = 3$ cm et $h = 15$ m, et on rappelle que $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}

Q11. Calculer l'ordre de grandeur de la valeur E_0 du champ électrique au pied de la ligne électrique à partir de l'expression précédente.

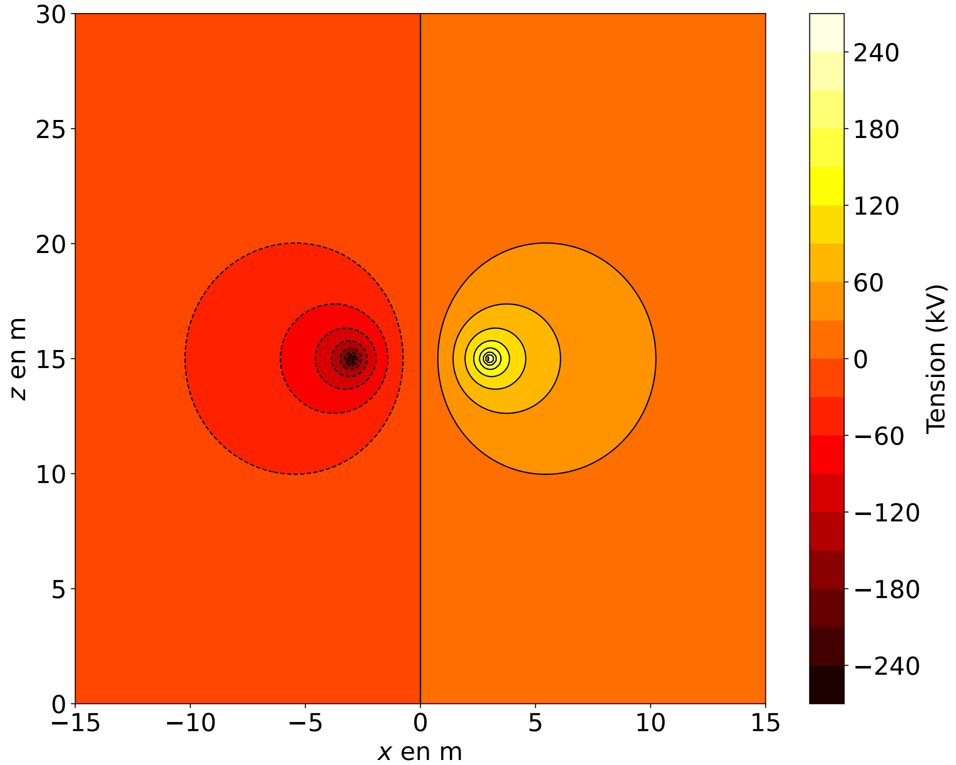


Fig. 1 – Lignes équipotentielles à proximité de la ligne très haute tension

Q12. Les symétries des lignes équipotentielles étaient-elles prévisibles ? Pourquoi ?

Q13. En déduire l'allure des lignes de champ électrique **(à compléter sur le graphique en annexe, le câble chargé positivement à l'instant illustré étant à droite)**. Expliquer comment estimer la valeur du champ électrique au pied de la ligne électrique à partir de la seule étude de ces lignes équipotentielles.

En France, un arrêté du 12 mai 2001 stipule que le champ électrique ne doit pas dépasser 5 kV/m au sol.

Q14. La ligne étudiée est-elle en accord avec la réglementation ?

III - Problème 3 : Paratonnerre.

On souhaite déterminer la distance de sécurité à respecter vis-à-vis des paratonnerres durant un orage.

Lorsqu'un paratonnerre est exposé à un éclair, le courant électrique I provenant de l'éclair circule intégralement au travers du cylindre métallique du paratonnerre, puis rejoint le sol (de conductivité γ_s). On se place en régime stationnaire pour cette étude, c'est-à-dire durant la centaine de millisecondes où un courant établi I, imposé par le nuage, circule.

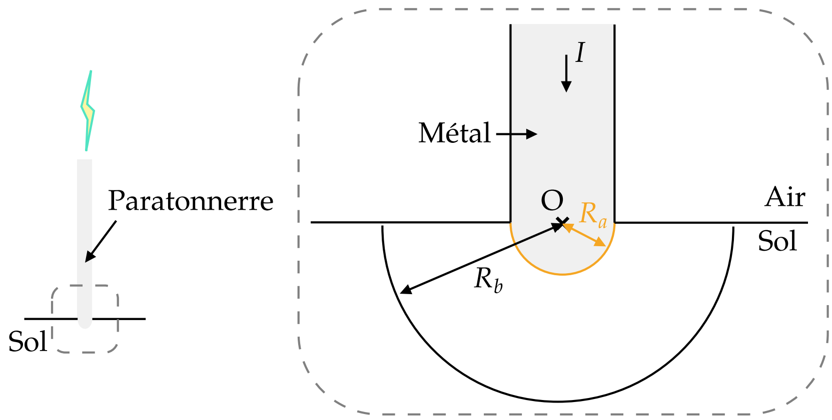


Fig. 2 – Schéma global puis zoomé de la situation

Le courant quitte le métal au-travers d'une demi-sphère, et est supposé radial (à symétrie sphérique) une fois dans le sol, on note $\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$ la densité volumique de courant électrique.

Q15. Rappeler l'équation de conservation de la charge électrique en 3D, puis sa simplification en régime stationnaire.

Q16. Que peut-on alors dire sur le flux du vecteur $\overrightarrow{j}$ et pourquoi ?

Q17. Justifier de façon rigoureuse que le courant électrique $I(r)$ passant au-travers d'un hémisphère de rayon $r > R_a$ dans le sol est indépendant de r, et vaut donc I.

Q18. En associant à votre calcul un schéma clair de la géométrie utilisée, exprimer la densité volumique de courant $j(r)$ en fonction de I et de r.

Q19. On suppose que le sol se comporte comme un conducteur électrique de conductivité γ_s. Rappeler l'expression reliant $\overrightarrow{E}$ à $\overrightarrow{j}$.

Q20. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ régnant dans le sol, puis l'expression du potentiel électrique $V(r)$ en fonction de I, r et γ_s. On prendra $V \to 0$ loin du point O.

On cherche à déterminer la résistance électrique du sol de conductivité γ_s.

Q21. Exprimer la résistance électrique R du sol entre R_a et R_b, puis entre R_a et $R_b \to +\infty$.

On appelle R_h la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a. Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour ne pas que son corps ne soit traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée I_{max}), il faut que son pied le plus proche de la prise soit au minimum à une distance D du point O.

Q22. Déterminer la relation entre D, a, R_h, I, I_{max} et γ_s.

La résistivité ρ_s du sol est typiquement de l'ordre de $300\,\Omega$.m.

Q23. En déduire, en justifiant, la valeur de la conductivité électrique γ_s du sol.

La résistivité de l'eau de pluie est de l'ordre de $10\,\Omega$.m.

Q24. Lors d'un orage, justifier qualitativement de l'effet de l'humidité du sol sur sa résistance électrique, puis sur le risque d'électrocution.

Q25. Proposer un ordre de grandeur de conductivité électrique γ_m plausible pour un métal, en déduire s'il est légitime ou non de négliger depuis le départ la résistance électrique du paratonnerre cylindrique, long de $\ell = 2$ m et d'un diamètre $d = 1$ cm.

Généralement pour un éclair on obtient un courant I de l'ordre de 10^4 A.

Q26. Proposer un ordre de grandeur plausible pour I_{max}, pour a ainsi que pour R_h. En déduire une valeur en ordre de grandeur pour D, valeur que l'on commentera. *Toute démarche, même incomplète, sera valorisée.*

Q27. Comment s'adapte le résultat précédent, si l'extrémité du paratonnerre est enterrée à une profondeur H ?

Prénom : ....

IV - Annexe

Annexe à détacher et à rendre avec votre copie

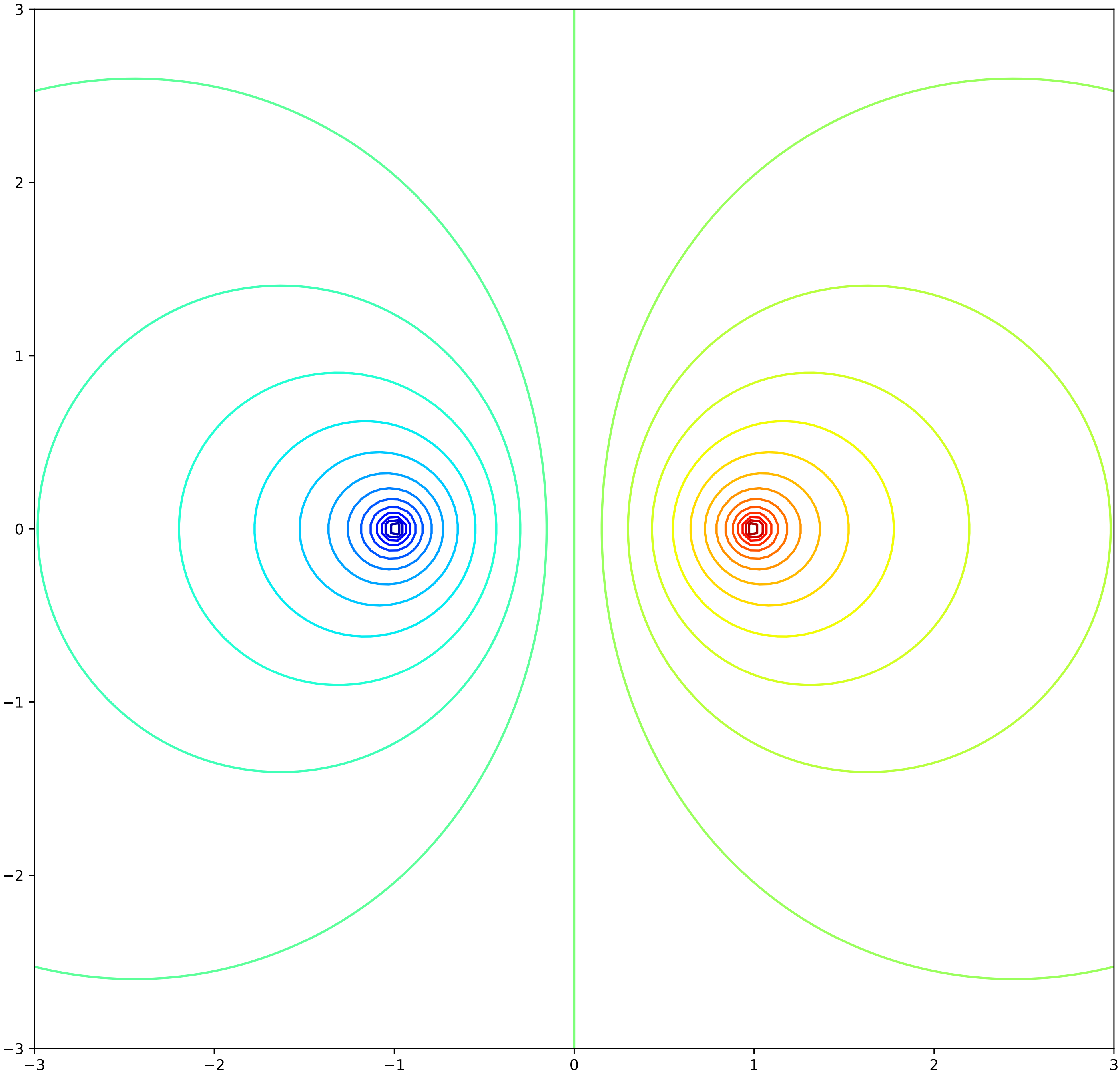


Fig. 3 – À un instant t, simulation des équipotentielles entre les deux câbles chargés, le câble chargé négativement étant à gauche, et le câble chargé positivement étant à droite.