Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque problème. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Problème : Perception des couleurs

Adapté d'après Centrale I PC 2007

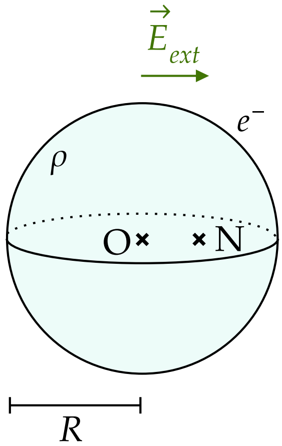
Il existe beaucoup de manières de faire apparaître un système éclairé en lumière blanche comme coloré pour l'oeil humain (interférences, diffraction, réfraction, etc.). Nous investiguons ici deux causes possibles.

I.1 Couleur par transparence

($\sim$ 75% des pts)

a. Réponse d'un milieu diélectrique à une onde électromagnétique

Q1. Proposer, en justifiant votre approche, deux intervalles de valeurs plausibles pour les longueurs d'ondes et fréquences correspondant aux couleurs du visible dans le vide. On se contentera d'un seul chiffre significatif pour chaque borne d'intervalle.



On considère un atome de numéro atomique Z, dont le nuage électronique est assimilé à une sphère uniformément chargée, de rayon R et de densité volumique de charge ρ. En présence d'un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}_{ext}$, le centre du nuage en O se sépare du noyau supposé ponctuel en N, et on note $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{NO}}(t)$.
Par ailleurs, on suppose également ce nuage électronique soumis à :

- Une force de rappel élastique notée $-m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ avec m la masse du nuage électronique et ω_0 une pulsation, constante.
- Une force de friction notée $-m\gamma\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$ avec γ une constante.

Q2. Comparer, en explicitant les ordres de grandeur utilisés, la taille d'un atome avec les longueurs d'ondes du spectre visible : Quelle hypothèse peut-on alors faire quant aux champs $\overrightarrow{E}_{ext}$ et $\overrightarrow{B}_{ext}$ de l'onde lumineuse à l'échelle de l'atome ?

Q3. Écrire l'équation du mouvement du nuage électronique lorsque celui-ci est soumis à un champ électromagnétique extérieur (noté $\overrightarrow{E}_{ext}$ et $\overrightarrow{B}_{ext}$).

Q4. Expliciter hypothèse l'influence du champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}_{ext}$ sur le mouvement du nuage électronique est négligeable devant l'influance du champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}_{ext}$.

On supposera cette hypothèse vérifiée pour la suite, et on note en notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}}_{ext} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{\overrightarrow{E}}_0$ un vecteur constant et uniforme, et ω une pulsation du domaine du visible. On considère que le milieu contient un nombre constant n d'atomes par unité de volume.

Q5. Rappeler la définition du moment dipolaire d'un système $\overrightarrow{p}$, puis calculer $\overrightarrow{p_i}$ le moment dipolaire d'un atome individuel : $\overrightarrow{p_i}$ qu'on exprimera en s'aidant de $\overrightarrow{r}$ pour l'atome étudié.

Q6. Définir le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ puis démontrer que :

$$\underline{\overrightarrow{P}} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}\underline{\overrightarrow{E}}$$

où on explicitera l'expression de ω_p en fonction de e, m, n et ε_0.

Rappel : Dans un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope, $\overrightarrow{\underline{P}} = \varepsilon_0(\underline{\varepsilon_r} - 1)\overrightarrow{\underline{E}}$

On suppose $\gamma \ll \omega_0\varepsilon_0$, et on choisit de noter $\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r"$, de sorte à ce que pour la suite du sujet on utilise :

$$\varepsilon_r' = 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_r" = \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

b. Interprétation de la perception d'une couleur en transparence

On cherche une solution des équations de Maxwell dans le milieu diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité diélectrique $\underline{\varepsilon_r}$ sous forme d'onde plane monochromatique se propageant dans le sens des z croissants. On note donc $\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{E_0}\exp(j(\omega t - \underline{k}z))\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{\underline{B}} = \underline{B_0}\exp(j(\omega t - \underline{k}z))\overrightarrow{u}_y$ avec $\underline{E_0}$, $\underline{B_0}$ et k a priori complexes. On pose k_0 tel que $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

Q7. Pourquoi peut-on choisir E_0 réel ?

Q8. Exprimer les équations de Maxwell, et en déduire la relation $\underline{k}^2 = k_0^2\underline{\varepsilon_r}(\omega)$.

On note $\underline{k} = k' - jk"$.

Q9. Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de k', $k"$, z, ω, E_0, μ_0 et des vecteurs unitaires.

Q10. En raisonnant sur un système inclus dans un pavé droit de section S entre z et $z + \mathrm{d}z$, déterminer l'expression de la puissance volumique dissipée par le milieu diélectrique en fonction de k', $k"$, z, ω, E_0 et μ_0.

On se place désormais à la pulsation $\omega = \omega_0$, et pour la matériau étudié $\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} \gg 1$.

Q11. Rappeler, dans le cas général d'un milieu excité par une onde plane monochromatique, la définition de l'indice optique complexe $\underline{n}$.

On note $\underline{n} = n' - in"$.

Q12. Démontrer que $n' = n" = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}$.

Le milieu diélectrique étudié est un rubis : au-delà de son intérêt esthétique c'est un cristal d'oxyde d'aluminium ayant été historiquement l'élément clé de la réalisation des tous premiers émetteurs lasers. Pour le rubis, $\omega_0 = 5 \times 10^{15}$ rad.s^{-1}.

Q13. Lorsqu'éclairé en lumière blanche, détailler votre raisonnement pour prédire la couleur du rubis.

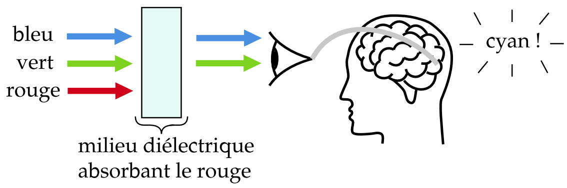
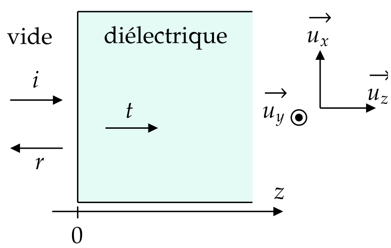


Fig. 1 – Principe de l'apparition de couleur par transparence pour un filtre coloré cyan

On considère une interface entre le vide et le diélectrique étudié précédemment le tout recevant en incidence normale les champs $\overrightarrow{\underline{E}}_i = E_0\exp(j(\omega t - \underline{k}z))\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{\underline{B}}_i = \underline{B_0}\exp(j(\omega t - \underline{k}z))\overrightarrow{u}_y$ déjà utilisés plus tôt. On suppose qu'à l'interface la densité surfacique de courant électrique est nulle : $\overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{0}$.



Q14. Montrer, en détaillant votre raisonnement, que l'expression des coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique : $\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$ et $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{n}}$.

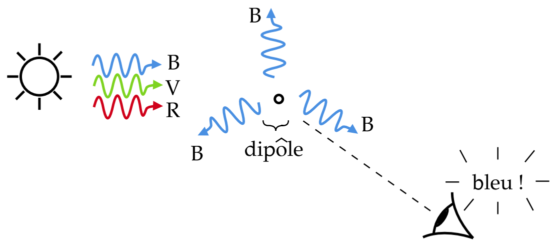
Q15. En déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en puissance R et T à l'interface en fonction de n' et $n"$. La puissance surfacique moyenne transmise en un $z > 0$ quelconque dépend-elle de z ?

I.2 Couleur par diffusion

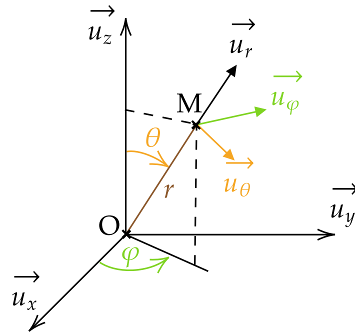
(∼ 25% des pts)

Lorsque éclairée, l'atmosphère est transparente puisque la nuit il est possible de voir les étoiles. Pourtant, en plein jour le ciel entier rayonne d'une couleur bleue, ce que nous allons expliquer.

On parle de diffusion lorsqu'un dipôle excité par une onde électromagnétique absorbe puis réémet dans une direction aléatoire un photon perçu. Par cet intermédiaire, des photons hors de l'axe oeil-Soleil parviennent à l'oeil au sol.



On étudie un atome exposé à un rayonnement de champ électrique $\overrightarrow{\underline{E}}_{ext} = \underline{E}_0 e^{j\omega t}\overrightarrow{u_z}$, de moment dipolaire $\overrightarrow{\underline{p}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{\underline{E}}_{ext}$.
De plus, l'atome étant situé au point O, on admet les expressions des champs rayonnés par l'atome, perçus par un observateur au point M :



$$\overrightarrow{\underline{E}}(\mathrm{M},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\ddot{\overrightarrow{\underline{p}}}(t-\frac{\mathrm{OM}}{c}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}{c^2\mathrm{OM}^3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\underline{B}}(\mathrm{M},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\overrightarrow{\underline{p}}}(t-\frac{\mathrm{OM}}{c}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}{c\mathrm{OM}^2} \quad \text{où} \quad \ddot{f} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

Q16. Démontrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée par le dipôle s'écrit :

$$\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{\mu_0 e^4 |E_0|^2}{32\pi^2 m^2 c r^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \sin^2\theta\,\overrightarrow{u}_r$$

Q17. En déduire que la puissance surfacique rayonnée par le dipôle atomique dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est nulle.

On donne $\int_0^\pi (\sin x)^3 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Q18. Déterminer la valeur moyenne temporelle de la puissance totale rayonnée $\langle P\rangle$, en fonction de $||\overrightarrow{\underline{E}}_0||$, μ_0, c, ω, m, e et ω_0.

À un facteur multiplicatif près, le rayonnement diffusé par l'atmosphère a les mêmes caractéristiques que celui diffusé (ou "rayonné") par l'atome individuel étudié précédemment.

Q19. En déduire une explication de la couleur d'un ciel sans nuage.

Q20. Pourquoi lors d'un coucher de soleil ce dernier apparaît-il rouge ?

$\mathcal{FIN}$

Pour votre culture : cette dépendance en $\sin^2\theta$ du vecteur de Poynting permet de tracer le diagramme de rayonnement du dipôle, déjà évoqué lors des présentations orales pour des émetteurs ultrasons, indiquant pour chaque angle d'émission possible la puissance relative émise.

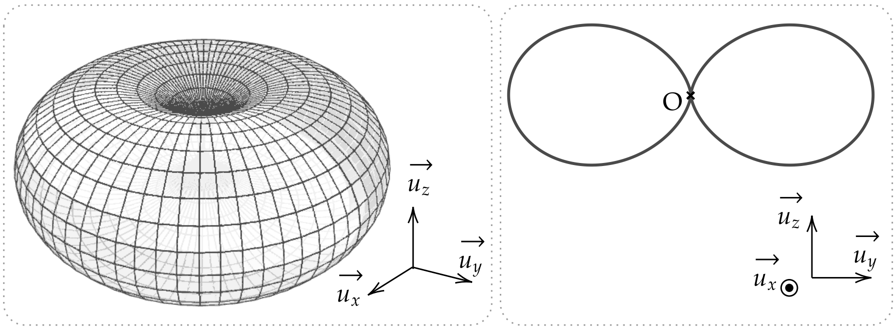


Fig. 2 – Diagramme de rayonnement électromagnétique en 3D puis projeté en 2D du dipôle