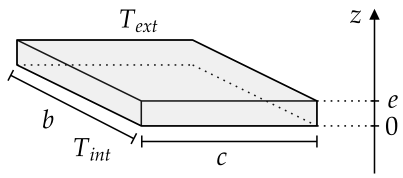
Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque sous-partie. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Thermique du manchot (50% des pts)

On considère un matériau homogène de conductivité thermique λ, masse volumique μ et capacité thermique massique c, en forme de pavé droit compris entre $z = 0$ et $z = e$. On note $T(z)$ la température du matériau en faisant l'hypothèse d'un régime stationnaire. La température sur la portion $z \geq e$ est uniforme et égale à T_{ext}, tandis que la température sur $z \leq 0$ est égale à T_{int}. On considère la diffusion thermique comme seul mode de transfert thermique.



Q1. Rappeler sans démonstration l'expression de la loi de Fourier, ainsi que dans le cas le plus général l'expression de l'équation locale de conservation de l'énergie interne.

Ce matériau n'est pas le siège de courants électriques, ni de quelconques réactions chimiques ou nucléaires.

Q2. En détaillant votre raisonnement, déterminer le profil de température $T(z)$ pour $z \in [0; e]$.

Q3. Rappeler l'expression littérale reliant la puissance thermique P_{th} traversant une surface S au vecteur densité de puissance thermique $\overrightarrow{j}_{th}$.

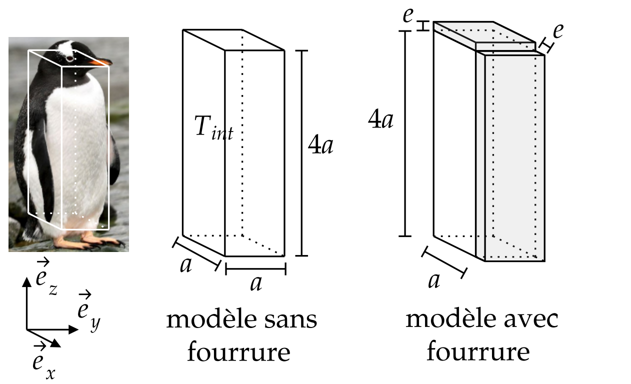
Q4. En justifiant rigoureusement, déterminer l'expression de la puissance thermique P_{th} traversant la surface $S = b \times c$, P_{th} étant comptée positivement dans le sens des z croissants.

Q5. Définir la résistance thermique R_1 de ce matériau, puis l'exprimer en fonction de λ, e, b et c.

Ce matériau modélise la couche de graisse + plumes isolant les manchots du froid.

On modélise un manchot sans son plumage comme un pavé droit de volume $V = 4a^3$ et de température uniforme T_{int}, maintenue constante grâce à son métabolisme fournissant une puissance totale P.

On modélise le plumage comme **six** couches planes de matériau isolant (le schéma n'en montre que deux), tous des pavés droits de conductivité thermique λ comme décrit précédemment. On suppose $e \ll a$ de sorte à ce qu'il ne soit pas nécessaire de considérer les volumes de plumage proportionnels à ae^2 et e^3. La température de l'air extérieur au contact du plumage est T_{ext} (on considère une éventuelle couche limite comme d'épaisseur quasi-nulle) et on reste en régime stationnaire.

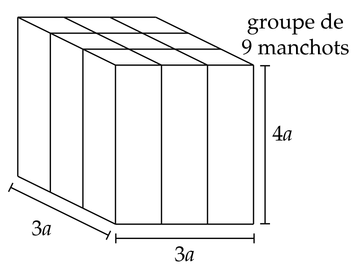


Q6. En justifiant votre démarche, proposer un circuit électrique analogue à la situation du manchot avec son plumage. On y fera figurer T_{int}, T_{ext}, P, et on donnera l'expression littérale en fonction de λ, a et e de toute résistance thermique intervenant sur le schéma.

On a $P = 50$ W, $e = 1$ cm, $a = 10$ cm, $T_{int} = 37$ °C et $T_{ext} = -13$ °C.

Q7. Déterminer la valeur numérique de la conductivité thermique. Quelle que soit la valeur numérique obtenue on prendra $\lambda = 0,05$ K^{-1}.W.m^{-1} pour la suite.

Pour lutter contre le froid, 9 manchots se regroupent, formant un pavage carré parfait.



Q8. Exprimer la puissance métabolique totale P' que doit apporter le groupe de manchots pour maintenir leur température T_{int} dans cette nouvelle configuration.

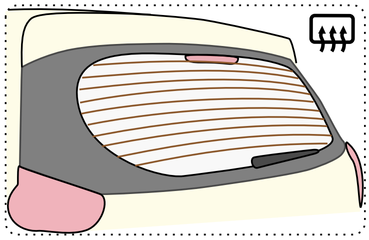
Q9. Déterminer la valeur du rapport $\frac{P'}{9P}$. Commenter le résultat obtenu.

II - Désembuage automobile

(50% des pts)

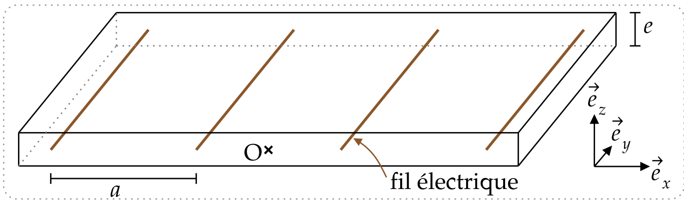
À l'arrière des voitures, on peut observer des fins fils horizontaux bruns au-travers de la vitre arrière. À l'enclenchement du bouton "désembuage", ces fils sont parcourus par un courant électrique, dégageant une énergie thermique par effet Joule.

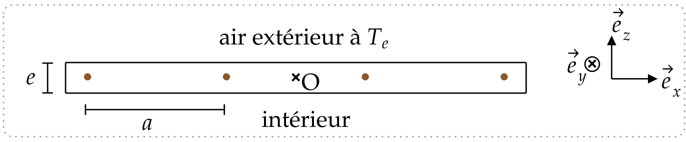
On note μ la masse volumique, λ la conductivité thermique et c la capacité thermique massique de la vitre. Chacune de ces grandeurs est uniforme dans la vitre.



On suppose que :

- Les fils électriques infiniment fins sont infiniment longs selon (Oy), donc T ne dépend pas de y.
- Il y a une succession infinie de fils dans la direction (Ox) séparés d'une distance a, l'origine O étant choisie au milieu de deux fils.
- On néglige les échanges thermiques entre la vitre et l'air intérieur ($h_i = 0$). Les échanges thermiques entre la vitre et l'air extérieur de température T_e au loin sont pris en compte et quantifiés par le coefficient $h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1}, car la voiture est en train de rouler.





Q10. Exprimer et nommer la loi décrivant le transfert thermique à l'interface en $z = +\frac{e}{2}$, à partir des données de l'énoncé. On précisera les points d'application de toute fonction impliquée dans l'expression.

On suppose désormais que e est suffisamment faible pour négliger la dépendance de T par rapport à z.

Q11. Démontrer, en justifiant rigoureusement, qu'en l'absence de terme source d'énergie thermique la température $T(x,t)$ à l'intérieur de la vitre vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\mu e c}(T_e - T)$$

Q12. Comment appelle-t-on le coefficient D ? L'exprimer en fonction des données du problème, puis rappeler son unité.

On se place dans un premier temps en régime stationnaire, le désembuage étant enclenché. Chaque fil électrique dissipe une puissance P_L **par unité de longueur** de fil électrique. Par symétrie $T(x) = T(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, et les plans à $x = \frac{a}{2}[a]$ constant sont Π^+ pour $\overrightarrow{j}_{th}$.

Q13. Déterminer l'expression de $T(x)$ pour $x \in \left]-\frac{a}{2}; +\frac{a}{2}\right[$ en fonction des données, on pourra poser $b = \sqrt{\frac{e\lambda}{h_e}}$.

La pression partielle en vapeur d'eau dans l'habitacle est de 6×10^3 Pa. Il se trouve que 6000 Pa est également la pression de vapeur saturante de l'eau à $T_{vap} = 308$ K : $P_{sat}(T = 308\text{K}) = 6 \times 10^3$ Pa.

Q14. En déduire que la puissance linéique minimale $P_{L\,min}$ nécessaire pour assurer en régime stationnaire le désembuage en tout point de la vitre est :

$$P_{L\,min} = 2\sqrt{h_e e \lambda}(T_{vap} - T_e)\sinh\left(\frac{a}{2b}\right)$$

On donne $a \simeq 2b$, $e^1 \simeq 2,7$, $\mu = 2700$ kg.m^{-3}, $c = 800$ J.K^{-1}.kg^{-1}, $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}, $e = 6$ mm, $T_e = 5$ °C et $h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1}.

Q15. En précisant soigneusement votre démarche, indiquer l'ordre de grandeur de la puissance **totale** P consommée par le système de désembuage de la vitre arrière d'une voiture typique. Commenter le résultat en comparaison de l'ordre de grandeur de la puissance mécanique fournie par une voiture typique.

On étudie maintenant l'évolution spatiale et temporelle de la température une fois le chauffage éteint, l'extinction ayant lieu à la date $t = 0$. Pour $t \leq 0$ le profil de température était le profil de température en régime stationnaire. Le profil de température se généralise alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ sous la forme :

$$T(x,t) = T_e + \frac{P_L}{h_e a}\left[F_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times (-1)^n}{1 + \left(\frac{2\pi n d}{a}\right)^2} F_n(t) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right] \qquad \text{avec } F_n(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Q16. Déterminer explicitement l'expression des fonctions $F_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de D, n, a, h_e, μ, e et c.

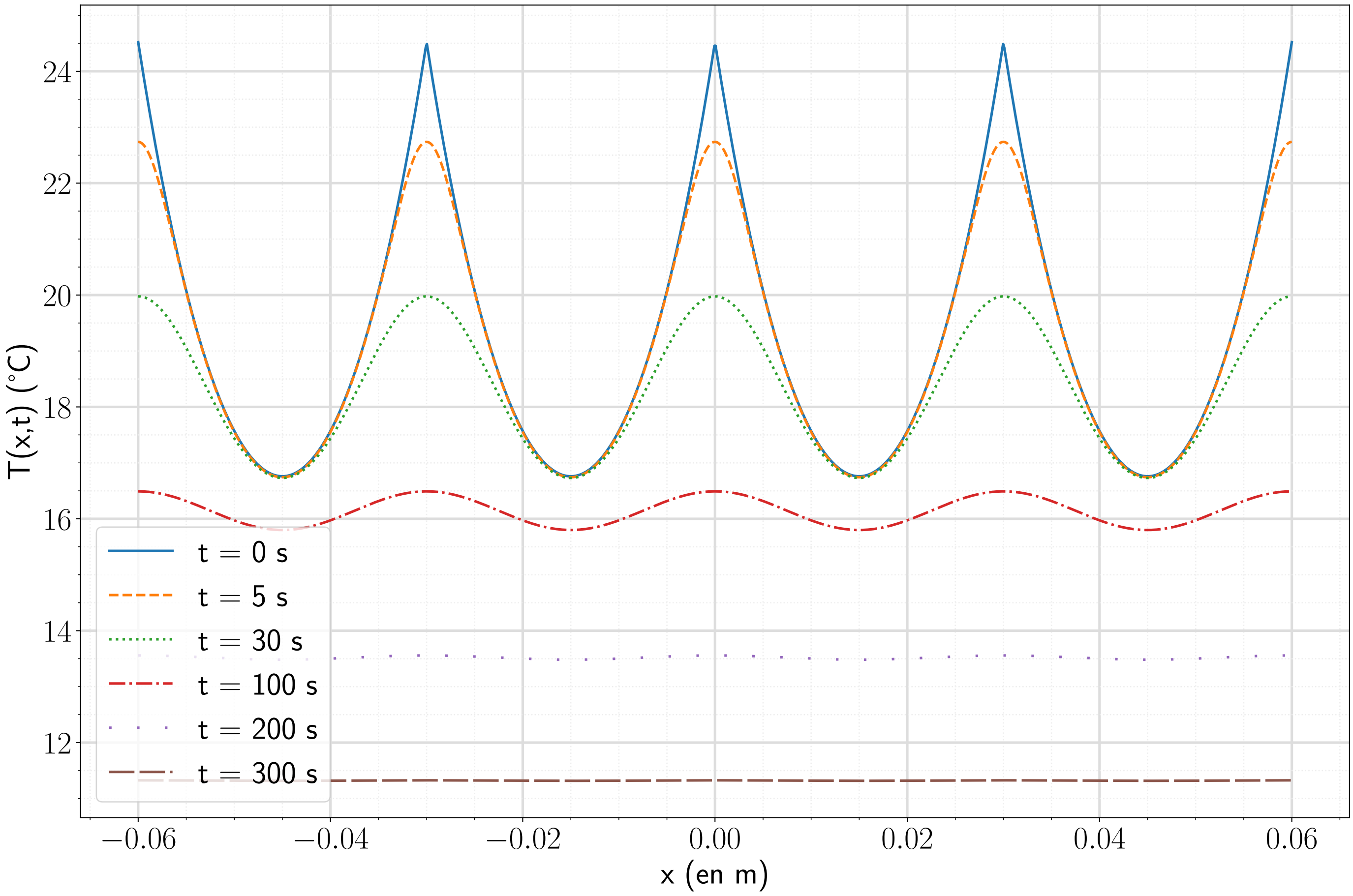


Fig. 1 – Profil de température à différents instants, à partir de $t = 0$ lorsque le désembuage est désactivé.

Q17. Mettre en évidence deux temps caractéristiques dont on donnera le sens physique ainsi que l'expression littérale.

Q18. Donner, avec un seul chiffre significatif, les valeurs numériques de ces deux temps caractéristiques. Commenter au vu du graphique tracé.