



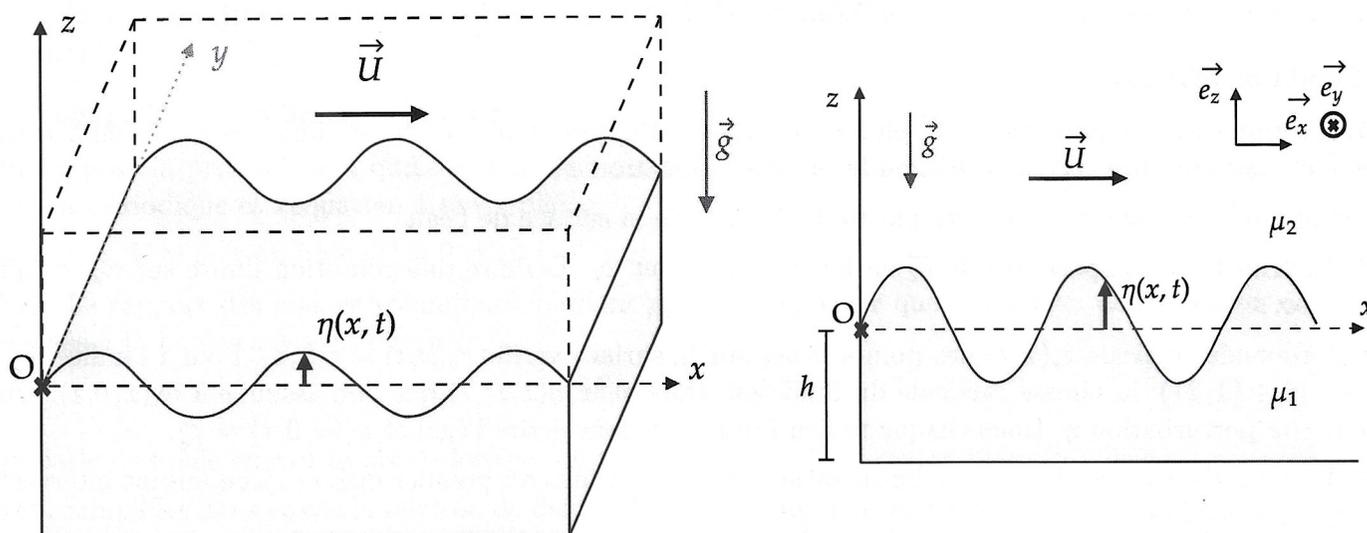
Durée : 3 h 00. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque problème. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Naissance et propagation de la houle

(75% des pts)

Adapté d'après Centrale Physique 1 PC 2024

On appelle "houle" les vagues naissant lorsque le vent (fluide 2) souffle sur une surface d'eau (fluide 1). L'air et l'eau sont considérés comme des fluides **parfaits et incompressibles** de masses volumiques respectives μ_2 et μ_1 . On note $h > 0$ la hauteur d'eau par rapport au fond en l'absence de vagues : l'eau est donc comprise, au repos, dans l'intervalle $[-h; 0]$.



On supposera que les écoulements dans l'air et l'eau sont invariants par translation selon Oy et que le mouvement des fluides s'effectue sans composante selon \vec{e}_y . En l'absence de perturbation $\eta(x,t)$, la vitesse uniforme et constante de l'air est $U\vec{e}_x$.

Les petites oscillations $\eta(x,t)$ induisent une perturbation de ce champ de vitesse \vec{V}_2 dans l'air : $\vec{V}_2 = U\vec{e}_x + \vec{v}_2$ où $\vec{v}_2 = u_2(x,z,t)\vec{e}_x + w_2(x,z,t)\vec{e}_z$. De même pour l'eau, de base au repos, on note la perturbation $\vec{v}_1 = u_1(x,z,t)\vec{e}_x + w_1(x,z,t)\vec{e}_z$. Les composantes de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et leurs dérivées sont des infiniment petits du premier ordre.

Les écoulements dans les deux fluides sont irrotationnels ce qui permet de définir les potentiels des vitesses $\varphi_1(x,z,t)$ et $\varphi_2(x,z,t)$ tels que $\vec{v}_1 = \text{grad}(\varphi_1)$ et $\vec{V}_2 = \text{grad}(Ux + \varphi_2)$.

On note $P_1(x,z,t)$ et $P_2(x,z,t)$ les champs de pression dans l'eau et l'air, on suppose le champ de pression continu au passage de la surface à l'air libre de l'eau.

a. Mise en équation et linéarisation

Q1. Définir précisément ce qu'est un fluide incompressible, et ce qu'est un écoulement incompressible. En tenant compte de l'incompressibilité des fluides, montrer que $\Delta\varphi_1 = 0$ et $\Delta\varphi_2 = 0$.

L'écoulement du fluide (1) respecte l'équation d'Euler.

Q2. En déduire l'équation différentielle reliant μ_1 , \vec{v}_1 , P_1 et \vec{g} .

Q3. Démontrer très rigoureusement que la linéarisation de cette équation, en ne conservant que les termes en vitesse d'ordres inférieurs ou égaux à 1, conduit à l'égalité :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{P_1}{\mu_1} + gz = C_1(t) \quad \text{où } C_1(t) \text{ est une fonction du temps}$$

Q4. De même, écrire l'équation d'Euler vérifiée par le champ des vitesses \vec{V}_2 en tout point du fluide (2). Démontrer que la linéarisation de cette équation, en ne conservant que les termes en vitesse d'ordres inférieurs ou égaux à 1, conduit à l'égalité :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{P_2}{\mu_2} + gz = C_2(t) \quad \text{où } C_2(t) \text{ est une fonction du temps}$$

On choisit pour la suite une pression de référence $P_{\text{réf}}$ telle que les champs de pression dans les fluides s'écrivent :

$$\begin{cases} P_1 = P_{\text{réf}} - \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + gz \right) \\ P_2 = P_{\text{réf}} - \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + gz \right) \end{cases}$$

b. Conditions limites

Q5. Exprimer les composantes de \vec{v}_1 en fonction de φ_1 . Déduire d'une condition limite satisfaite en $z = -h$ par le champ des vitesses, une condition limite sur la fonction φ_1 en $z = -h$.

On suppose l'écoulement d'air n'est pas perturbé loin de la surface de l'eau.

Q6. Exprimer les composantes de \vec{v}_2 en fonction de U et φ_2 . Déduire une condition limite sur φ_2 lorsque $z \rightarrow +\infty$.

La coordonnée verticale $z_s(x, t)$ des points situés sur la surface vérifie $z_s(x, t) = \eta(x, t)$. Pour i l'indice d'un milieu ($i \in \{1; 2\}$), la vitesse verticale du fluide est alors $w_i(x, \eta(x, t), t)$ que l'on assimile à $w_i(x, 0, t)$ pour une petite perturbation η . Dans chaque milieu i , on peut donc écrire l'égalité $w_i(x, 0, t) = \frac{D\eta}{Dt}$.

Q7. Déduire de cette égalité, après linéarisation, deux équations au premier ordre : l'une faisant intervenir η et φ_1 , l'autre η et φ_2 .

On admet qu'on obtient également l'équation suivante par continuité de la pression :

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) \quad (I.1)$$

c. Condition de démarrage des oscillations

On cherche les solutions de l'ensemble des équations précédentes sous la forme de représentations complexes :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, z, t) = \underline{\phi}_1(z) e^{j(\underline{\omega}t - kx)} \\ \varphi_2(x, z, t) = \underline{\phi}_2(z) e^{j(\underline{\omega}t - kx)} \\ \eta(x, t) = \eta_m e^{j(\underline{\omega}t - kx)} \end{cases} \quad \text{avec } k > 0, \underline{\omega} = \omega' + j\omega'' \text{ et } \eta_m \text{ une constante réelle non-nulle}$$

Q8. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\underline{\phi}_2(z)$. En déduire la solution $\underline{\phi}_2(z)$ uniquement en fonction de k , z et de la constante $\underline{\phi}_{2,0} = \underline{\phi}_2(z = 0)$ en tenant compte d'une condition limite établie en question 6.

Q9. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\underline{\phi}_1(z)$. En déduire que $\underline{\phi}_1(z) = \underline{\phi}_{1,0} \cosh(k(z + h))$ où intervient la constante $\underline{\phi}_{1,0} = \frac{\phi_1(z=0)}{\cosh(kh)}$ en tenant compte d'une condition limite établie précédemment.

Q10. Démontrer que les deux équations établies à la question 7 traduisant les propriétés de la surface de séparation, conduisent aux égalités :

$$-k \underline{\phi}_{2,0} = j(\underline{\omega} - kU) \eta_m \quad \text{et} \quad k \times \sinh(kh) \underline{\phi}_{1,0} = j \underline{\omega} \eta_m$$



Q11. En utilisant l'équation (I.1) de continuité de la pression, établir la relation suivante :

$$\mu_1 \left[\frac{(j\omega)^2}{\tanh(kh)} + kg \right] = \mu_2 [(\omega - kU)^2 + kg] \quad (\text{I.2})$$

Q12. Indiquer, justification à l'appui, quel doit être le signe de ω'' permettant à partir de l'état de repos le démarrage des oscillations de la surface de séparation en présence du vent de vitesse U .

Q13. Démontrer que si la profondeur h est supposée infinie et qu'on suppose $\mu_2 \ll \mu_1$, le démarrage des oscillations s'observe lorsque la vitesse du vent U vérifie $U^2 > \frac{g\mu_1}{k\mu_2}$.

Q14. Toujours dans le cas limite d'une profondeur h infinie, calculer la longueur d'onde maximale observable lorsque la vitesse du vent vaut 100 km/h. L'approximation de profondeur infinie vous semble-t-elle raisonnable ?

d. Propagation de la houle sans vent

On suppose la profondeur h quelconque, donc pas forcément infinie. Hors de la zone de tempête, la houle devient périodique et l'équation 1 se simplifie.

Sans vent, $U = 0$ et on pose $\omega'' = 0$ et $\omega = \omega' = \omega$.

Q15. Le rapport des masses volumiques vérifiant $\mu_2 \ll \mu_1$, montrer que la relation de dispersion de l'onde associée à la houle sans vent s'écrit :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

On parle de houle en eau profonde lorsque $kh \gg 1$.

Q16. Simplifier dans ce cas la relation de dispersion précédente, puis calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de g et k . Indiquer, en justifiant, si le phénomène de propagation est dispersif.

On considère un paquet d'ondes gaussien centré autour d'une valeur k_0 de k , qui se propage selon la direction des x croissants. Les figures A et B suivantes représentent deux évolutions différentes envisagées pour ce paquet d'ondes lors de sa propagation. Chaque courbe correspond au profil spatial de $\eta(x, t_n)$ à l'instant t_n .

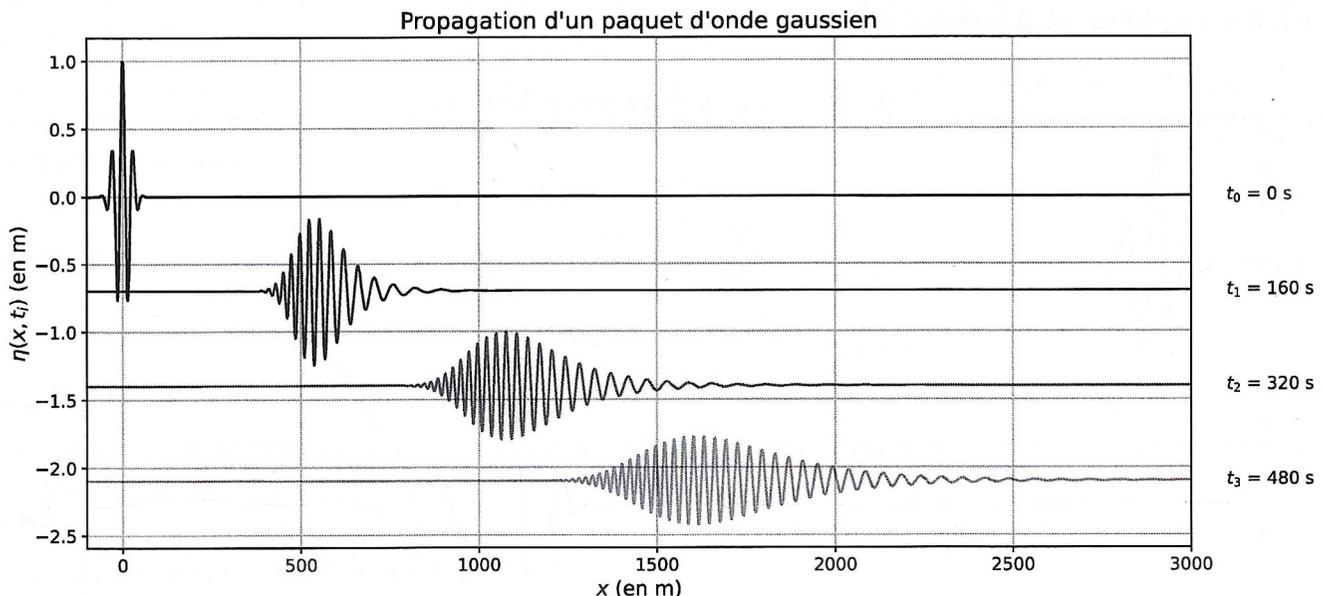


Fig. 1 – Cas A

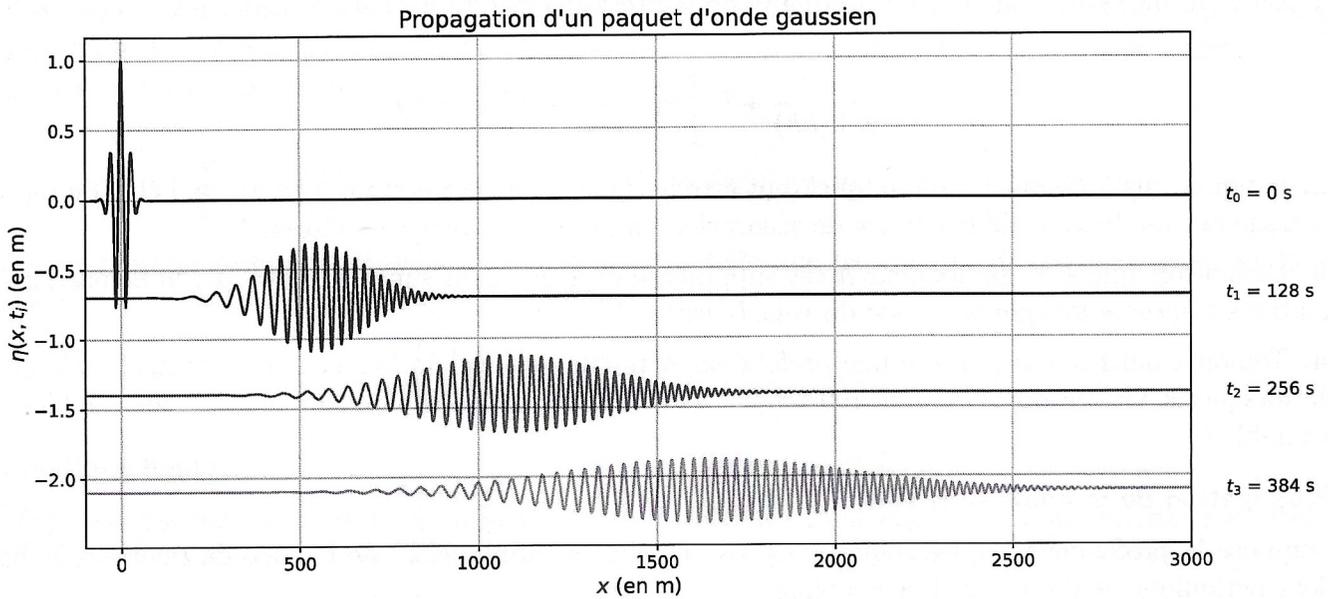


Fig. 2 – Cas B

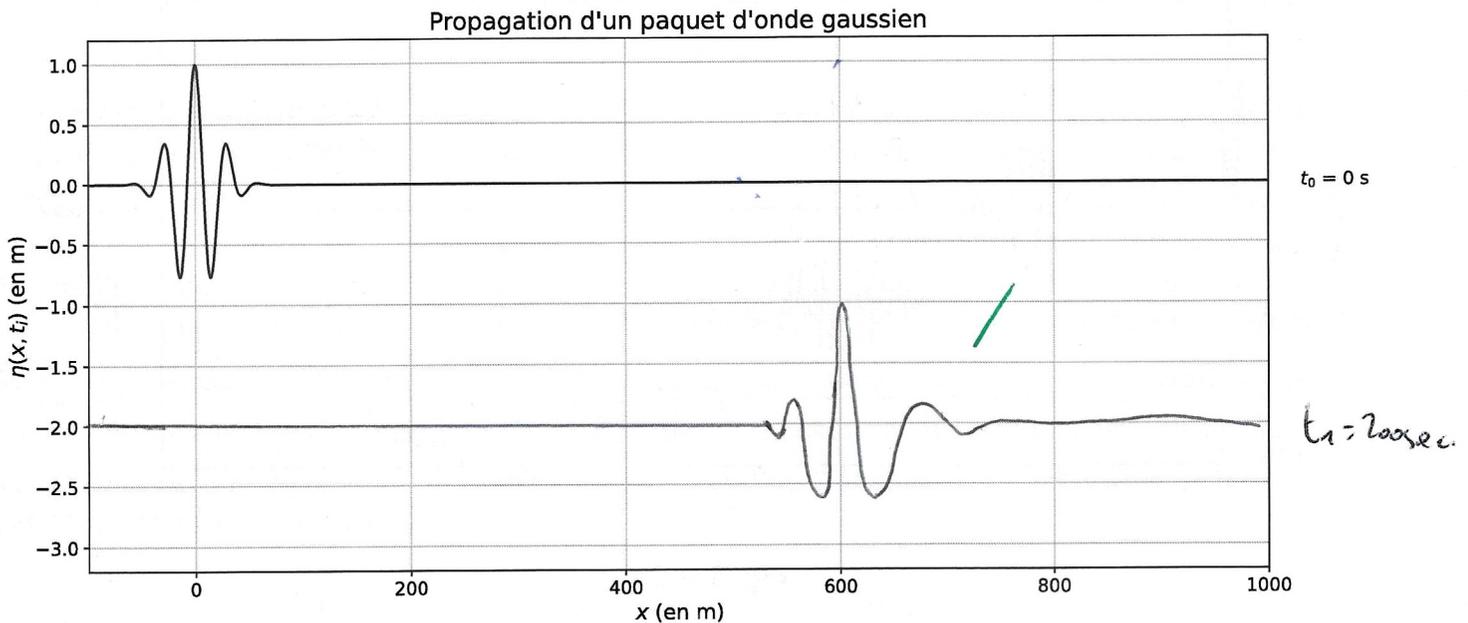
Q17. En justifiant, préciser si les cas A et B correspondent à des phénomènes de propagation dispersifs, et indiquer parmi ces deux cas celui qui peut correspondre à la relation de dispersion de la houle en eau profonde.

Proche des rivages on peut adopter cette fois le modèle de la houle en eau peu profonde, suivant la condition $kh \ll 1$.

Q18. Simplifier dans ce cas la relation de dispersion de la houle sans vent, puis exprimer les vitesses de phase et de groupe.

Q19. On prend $h = 1$ m. Une onde est représentée ci-dessous. Compléter cette figure en représentant le profil spatial de l'onde à $t = 200$ s. On veillera à rendre l'énoncé avec votre copie.

Figure à compléter et à rendre avec votre copie.



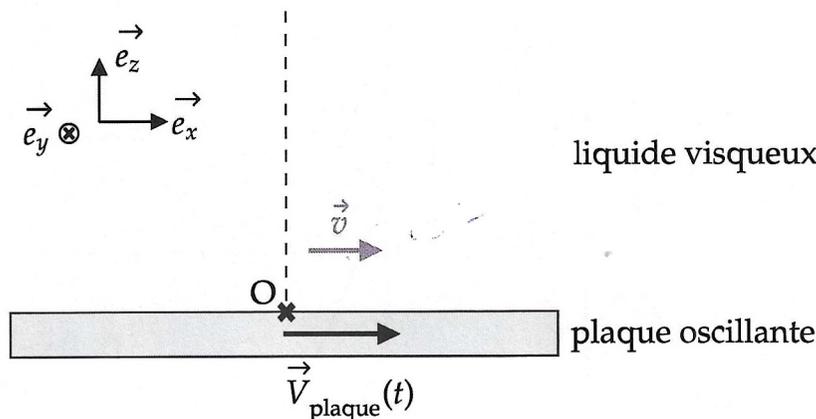


II - Effet de peau en mécanique des fluides

(25% des pts)

D'après CCP Physique 1 PSI 2008

On considère une plaque plane infinie en longueur et en largeur, formant le plan xOy . Un fluide visqueux incompressible de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une très grande épaisseur h . Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$, tout se passe comme si cet espace était illimité. La plaque oscille à la pulsation ω , sa vitesse étant $\vec{V}_{\text{plaque}} = v_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. On néglige les phénomènes de pesanteur.



On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

On admet que le champ de vitesse dans le fluide s'écrit sous la forme $\vec{v} = v(x, y, z, t) \vec{e}_x$.

Q20. En analysant les invariances du système et les propriétés du fluide, de quelles variables dépend le champ de vitesse ?

Q21. Montrer que le terme convectif $\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de x et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f}(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x$, de sorte à ce que $\vec{v} = \text{Re}(\vec{v})$.

Q22. Donner la forme générale de $\underline{f}(z)$, pour laquelle on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\mu\omega}}$.

Q23. En étudiant le comportement aux limites du fluide, donner l'expression du champ de vitesse réel dans le fluide. Commenter l'expression obtenue.

On considère un fluide 1000 fois plus visqueux que l'eau, de même masse volumique que cette dernière, pour une plaque oscillant à une fréquence de 2 Hz.

Q24. Déterminer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ .

Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique plutôt élevée, si bien que leur viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ est de l'ordre de $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Q25. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques Hertz.