

24
JOURS

pour préparer son entrée
en 2^e année de prépa

PHYSIQUE

de la **SUP** à la **SPÉ**

- Un planning optimisé de révisions
- Une sélection d'exercices les plus représentatifs de la Sup
- Les énoncés décryptés afin d'évaluer les points critiques
- Des corrigés détaillés avec les commentaires du professeur
- Les méthodes et formules à retenir

Florence **DEPAQUIT-DEBIEUVRE**



PHYSIQUE

de la **SUP** à la **SPÉ**

24 JOURS

pour préparer son entrée en 2^e année de prépa

collection dirigée par Karine Beaurpère

PHYSIQUE

de la **SUP** à la **SPÉ**

Florence DEPAQUIT-DEBIEUVRE

Professeure de chaire supérieure en PC
au lycée Roosevelt de Reims*



Dans la collection 24 jours
dirigée par Karine Beaupère

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits
sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-053250
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2019
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Présentation de la collection

Réussir son entrée en Spé nécessite une bonne organisation, notamment durant les vacances d'été précédant cette rentrée.

Seuls durant l'été, les étudiants doivent souvent faire face aux deux grandes interrogations suivantes :

- quels exercices travailler pour être sûr d'avoir revu l'intégralité du programme de Sup ?

- quelle méthode efficace utiliser pour bien travailler ces différents exercices ?

Il est à noter que la première question relève d'une double problématique, à la fois qualitative mais aussi quantitative.

J'ai donc conçu cette collection pour répondre à ces deux questions.

Tout d'abord, chaque ouvrage de la collection, dédié à une matière précise, donne naissance à l'étude de 24 sujets, et **24 sujets seulement**. Les auteurs de la collection ont **méticuleusement sélectionné** ces 24 sujets afin de **garantir des révisions efficaces de l'ensemble du programme de Sup**. De plus, pour optimiser encore davantage la qualité des révisions, les auteurs ont agencé ces 24 sujets de façon très réfléchie, de sorte qu'un même thème soit revu plusieurs fois à des moments bien différents.

Ensuite, chaque ouvrage propose la même **approche très méthodique**. On se base sur 24 séances de travail réparties sur l'été : ces 24 séances doivent être prévues dès le début de l'été. Durant chaque séance, l'étudiant doit chercher, seul, un sujet complet puis il consacre la fin de cette séance à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé.

Les **24 sujets** sont toujours organisés de la façon suivante :

- une **présentation du sujet** ;
- une **analyse stratégique de l'énoncé** ;
- un **corrigé très détaillé**, de telle sorte que la solution soit comprise de tous les étudiants ;
- des **techniques à mémoriser** ;
- un **formulaire** lié à l'exercice ;
- des **commentaires pertinents**.

Bien évidemment, il est tout à fait possible de travailler méthodiquement avec les ouvrages de cette collection plus régulièrement **tout au long de l'année de Sup** (en utilisant notamment les nombreux tableaux récapitulatifs des exercices). Travailler ainsi est donc l'assurance de se préparer très sérieusement à bien aborder la Spé et les concours.

Alors, bon vent vers la réussite !

Karine Beaurpère

Sommaire

Présentation du manuel	7
Conseils	11
Tableaux récapitulatifs des exercices	15
Jour n°1	19
Énoncé de l'exercice 1.1	22
Énoncé de l'exercice 1.2	31
Jour n°2	37
Énoncé de l'exercice 2.1	39
Énoncé de l'exercice 2.2	44
Jour n°3	51
Énoncé de l'exercice 3.1	52
Énoncé de l'exercice 3.2	56
Jour n°4	63
Énoncé de l'exercice 4.1	64
Énoncé de l'exercice 4.2	71
Jour n°5	75
Énoncé de l'exercice 5.1	77
Énoncé de l'exercice 5.2	82
Jour n°6	89
Énoncé de l'exercice 6.1	91
Énoncé de l'exercice 6.2	96
Jour n°7	101
Énoncé de l'exercice 7.1	102
Énoncé de l'exercice 7.2	109
Jour n°8	115
Énoncé de l'exercice 8.1	117
Énoncé de l'exercice 8.2	123
Jour n°9	129
Énoncé de l'exercice 9.1	131
Énoncé de l'exercice 9.2	139
Jour n°10	145
Énoncé de l'exercice 10.1	147
Énoncé de l'exercice 10.2	154
Jour n°11	159
Énoncé de l'exercice 11.1	161
Énoncé de l'exercice 11.2	166

Jour n°12	173
Énoncé de l'exercice 12.1	175
Énoncé de l'exercice 12.2	182
Jour n°13	187
Énoncé de l'exercice 13.1	189
Énoncé de l'exercice 13.2	194
Jour n°14	203
Énoncé de l'exercice 14.1	205
Énoncé de l'exercice 14.2	213
Jour n°15	221
Énoncé de l'exercice 15.1	223
Énoncé de l'exercice 15.2	228
Jour n°16	235
Énoncé de l'exercice 16.1	236
Énoncé de l'exercice 16.2	240
Jour n°17	243
Énoncé de l'exercice 17.1	245
Énoncé de l'exercice 17.2	251
Jour n°18	257
Énoncé de l'exercice 18.1	260
Énoncé de l'exercice 18.2	265
Jour n°19	273
Énoncé de l'exercice 19.1	275
Énoncé de l'exercice 19.2	283
Jour n°20	287
Énoncé de l'exercice 20.1	289
Énoncé de l'exercice 20.2	295
Jour n°21	303
Énoncé de l'exercice 21.1	305
Énoncé de l'exercice 21.2	313
Jour n°22	319
Énoncé de l'exercice 22.1	321
Énoncé de l'exercice 22.2	327
Jour n°23	331
Énoncé de l'exercice 23.1	332
Énoncé de l'exercice 23.2	339
Jour n°24	343
Énoncé de l'exercice 24.1	345
Énoncé de l'exercice 24.2	353
Formulaire à compléter	359

Présentation du manuel

Ce manuel a pour but de vous préparer efficacement à l'entrée en deuxième année de classes préparatoires (PC-PC*-PT-PT*-PSI-PSI*-MP-MP*).

Ce manuel repose sur une méthode originale qui a fait ses preuves auprès de mes étudiants de PC* du lycée Roosevelt de Reims pour la préparation aux concours.

L'originalité de ce manuel provient de la préparation méthodique et régulière à réaliser durant les mois d'été et durant toute l'année de première année.

Il vous sera aussi possible de le réutiliser pour préparer vos oraux de concours pendant la deuxième année et pendant les 4 semaines qui séparent l'écrit de l'oral car tous les exercices ont été posés aux oraux de divers concours.

Le principe est le suivant.

On se base sur 24 jours de révision répartis sur les deux mois d'été, à raison d'une heure pour chacun de ces 24 jours. Pendant cette heure, vous devrez chercher, seul, un sujet composé de deux exercices, pendant une durée de 30 minutes puis vous consacrerez ensuite 30 minutes à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du « corrigé ».

Concrètement, cela signifie que vous devrez suivre, jour après jour, le planning qui vous est proposé ici. Le premier jour de révision, vous vous attaquerez au « Jour n°1 », etc. jusqu'au « Jour n°24 ». Vous aurez alors traité 24 sujets, c'est-à-dire 48 exercices.

Ces sujets sont faisables en première année de classes préparatoires et pourront être repris et approfondis en deuxième année de classes préparatoires quelle que soit la filière.

Je tiens à souligner que la sélection des sujets proposés ici résulte d'un travail réfléchi vous permettant d'optimiser votre préparation à l'entrée en deuxième année de classes préparatoires. En effet, ces sujets ont été choisis de façon à couvrir l'ensemble des thèmes du programme de première année.

Je tiens aussi à souligner que l'ordre choisi pour ces 24 sujets vous permettra de revoir en permanence les thèmes principaux du programme. Le but est ici d'éviter de travailler les thèmes les uns après les autres.

Chaque jour de révision est construit de la façon suivante.

Une première page comporte deux exercices à travailler. Les pages suivantes vont vous permettre de rentrer dans le détail de chacun des deux exercices.

Je tiens tout de suite à préciser qu'un corrigé seul est assez inutile. Le but ici n'est pas de savoir faire un exercice par cœur sans le comprendre. Si vous avez compris la méthode, il vous sera très facile de vous adapter et de l'appliquer à d'autres situations. C'est l'analyse du sujet qui est essentielle. C'est ce qui explique les différentes parties qui vont être exposées ci-après.

Voici donc le schéma adopté pour chacun des deux exercices.

On commence par donner le niveau de l'exercice. Le codage du niveau est le suivant :

♣ exercice facile qu'il faut savoir traiter assez rapidement ;

♣♣ exercice de niveau moyen pouvant comporter des questions un peu délicates ;

♣♣♣ exercice comportant des questions particulièrement difficiles.

La suite se découpe selon les 5 parties suivantes.

Énoncé

L'énoncé de l'exercice est redonné afin de l'avoir sous les yeux pour la compréhension de l'analyse à venir. Cela évite de revenir en arrière pour lire l'énoncé.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cette partie commence par présenter et situer l'objet de l'exercice.

Puis l'analyse de l'énoncé se fait question par question. Il s'agit maintenant de comprendre la question posée et de voir comment démarrer efficacement l'exercice.

Il est bon de commencer par lire cette partie avant de lire le corrigé qui va suivre afin d'analyser les méthodes conduisant à la solution. Vous pouvez alors utiliser ces informations pour répondre à la question si vous n'y êtes pas parvenu seul.

↪ Une conclusion vient ensuite mettre en avant l'essentiel de cette question.

Corrigé

Cette partie correspond bien évidemment au corrigé des exercices. Ce corrigé est très détaillé afin de permettre une meilleure compréhension et propose parfois plusieurs méthodes. Il est aussi agrémenté de nombreux commentaires ou remarques.

Attention ! Le corrigé donné ici n'est pas une planche optimisée. En effet, toutes les preuves sont volontairement très (trop !) détaillées afin de ne pas laisser de points dans l'obscurité.

Utilisez aussi le corrigé pour apprendre à rédiger.

Techniques à mémoriser

Ce qu'il faut retenir d'un exercice, ce sont avant tout les techniques et les raisonnements qui ont été utilisés. Cette partie liste donc toutes les techniques à retenir.

C'est pourquoi cette partie est construite avec une succession de phrases commençant par :

♡ Il faut se souvenir ...

Formulaire

Cette dernière partie consiste à lister les formules importantes à connaître pour les concours.

Si vous suivez ce planning, vous aurez revu de façon efficace l'ensemble des thèmes du programme de première année. C'est donc l'assurance d'une préparation efficace pour réussir son entrée en deuxième année de prépa.

Bien évidemment, les concours en classes préparatoires ne se préparent pas seulement en deuxième année mais tout au long des deux années de préparation.

En première année vous pouvez chercher les exercices correspondant au cours que vous êtes en train d'étudier, en vous reportant aux tableaux récapitulatifs des exercices donnés en début d'ouvrage. Vous pourrez ainsi, tout au long de l'année, travailler en fonction de l'avancement de votre cours. Les numéros des exercices sont fabriqués comme suit : le premier numéro renvoie au jour de la préparation et le deuxième numéro indique s'il s'agit du premier exercice ou du deuxième. Par exemple l'exercice 7.2 se trouve en deuxième partie du « Jour n°7 ».

En deuxième année, vous pouvez utiliser ce livre afin de réviser les notions vues en première année soit en cherchant les exercices dans l'ordre donné soit en les cherchant en fonction du thème que vous souhaitez réviser. Dans ce deuxième cas, vous vous reporterez aux tableaux récapitulatifs des exercices.

Vous trouverez aussi en fin d'ouvrage un formulaire pré-rempli, qu'il faudra compléter au fur et à mesure de votre travail. Ce formulaire est volontairement à remplir afin que vous le fassiez vivre. Un formulaire complètement rédigé est bien souvent inutile car il est lu de façon passive sans réelle implication de la part de celui qui le lit, ce ne sera pas le cas si vous rédigez votre propre formulaire.

Je tiens aussi à préciser que le formulaire final ne correspond pas à la réunion des 48 formulaires issus des exercices car le formulaire final se veut plus complet et exhaustif. Il est aussi important de retenir les conditions d'application de la formule, de savoir quand et comment l'utiliser.

Enfin le formulaire est agrémenté de quelques remarques du jury afin que la rédaction de ce formulaire puisse se faire en ayant bien en tête les attentes du futur candidat à l'oral des concours.

Conseils

Quelques conseils pour bien utiliser ce livre

Il serait bon de faire quatre études de ce livre.

La première étude est une étude de fond qui peut commencer dès le début de la première année de prépa. Dès qu'un chapitre se termine, vous pouvez travailler avec minutie les exercices liés à ce chapitre : vous trouverez facilement les différents exercices répertoriés dans les tableaux. N'hésitez pas à faire vivre ce livre en l'annotant. C'est en écrivant que l'on apprend ! Toutefois, n'annotez pas les pages où figurent les deux énoncés des exercices d'un jour donné. Ces pages doivent rester vierges afin d'être retravaillées plus tard et de façon neutre.

La deuxième étude est une étude plus intense dans le temps, puisqu'il s'agit, pendant les 24 jours de révision durant l'été, de vous entraîner sur les deux exercices du jour sans avoir forcément revu le chapitre. Il s'agit ici de faire travailler sa mémoire et de savoir si les techniques sont acquises.

Le fait de refaire deux fois les mêmes exercices n'est pas gênant et ces deux études peuvent s'avérer très fructueuses. Les deux passages étant éloignés dans le temps, vous pouvez savoir si vous avez progressé.

La troisième étude peut être faite tout au long de la deuxième année de prépa afin de réviser les différentes parties du programme de première année qui fait partie intégrante du programme des concours.

La quatrième étude peut être faite entre les écrits et les oraux (en parallèle avec les autres livres de la collection 24 jours) afin de se préparer efficacement pour l'oral. Les sujets de première année vous paraîtront plus faciles.

Dans ce livre, je reviens plusieurs fois sur les mêmes notions. Pour un grand nombre d'entre vous, ceci est nécessaire afin de bien assimiler les démarches scientifiques et les démonstrations. C'est pour cela qu'il peut y avoir répétitions des commentaires, les mêmes techniques à retenir, les mêmes formules... C'est avec la pratique que vous allez vous améliorer et vous serez plus à l'aise face à toutes les situations.

Quelques conseils pour bien réussir son oral

Un oral est un échange avec l'examineur qui doit vous attribuer une note.

Rapport du jury 2010

L'exposé oral consiste en un dialogue entre le candidat et l'examineur. Les principales qualités appréciées chez un candidat sont sa rigueur, son autonomie et son dynamisme dans la conduite de l'exposé. Il est indispensable que le candidat prenne des initiatives, sans attendre à chaque instant l'approbation de

l'examineur. Si ce dernier intervient peu, c'est souvent le signe d'un exposé clair et exhaustif. Rappelons par ailleurs que, s'agissant d'un oral, il est inutile de recopier au tableau tout ce qui est dit.

Selon ces rapports, l'examineur attend pour la résolution d'un exercice :

- un dialogue entre le candidat et l'examineur ;
- une analyse qualitative de l'exercice proposé (discussion en fonction d'éventuelles prédictions de résultats, du choix des paramètres intervenants) ;
- une proposition de méthode de résolution, après éventuellement une discussion avec l'examineur ;
- la mise en équation du problème en utilisant les outils du programme ;
- la résolution « mathématique » ;
- l'analyse critique des résultats obtenus, la vérification aussi de l'homogénéité des résultats et la vérification de la pertinence du résultat.

J'ajouterai aussi que l'examineur évalue vos compétences en physique mais il va aussi, peut-être inconsciemment, évaluer d'autres qualités, et ce, dès le début de l'oral. Voici des points que l'examineur va pouvoir apprécier :

- votre expression orale (attention au vocabulaire que vous employez) ;
- votre rigueur ;
- votre dynamisme ;
- votre autonomie (prenez des initiatives sans attendre l'approbation de l'examineur) ;
- le soin apporté dans la présentation du tableau (les schémas sont toujours utiles et constituent une bonne base de travail) ;
- l'organisation du temps (l'intérêt du candidat est de présenter de manière précise et concise, le travail effectué lors de la préparation, afin de disposer d'un maximum de temps pour aborder les questions non traitées avec une aide éventuelle de l'examineur) ;

Rapport du jury CCP PC 2015

La gestion du temps reste très souvent problématique : la quasi-totalité des candidats ne gère pas le temps lors du passage au tableau et sans l'intervention de l'examineur, bon nombre d'entre eux ne traiterait qu'un seul des deux exercices. Il est impératif d'être très vigilant au temps et de consacrer environ vingt minutes à l'exercice majeur et environ dix minutes à l'exercice secondaire.

- votre capacité à vous adapter (il faut veiller lors de la préparation écrite à ne pas rester bloqué au niveau d'une question alors que l'on peut en admettre le résultat et traiter la suite. Les exercices sont progressifs et pour ne pas bloquer les candidats, des résultats intermédiaires sont souvent donnés) ;
- votre bon sens (pensez à signaler un résultat aberrant sans attendre la question de l'examineur) ;

- votre réactivité (capacité à assimiler les indications fournies par l'examineur).

Encore quelques conseils lors du temps de préparation qui doit être avant tout consacré au choix de la méthode de résolution. Vous devez préparer la structure de votre exposé et la démarche de résolution. Il n'est donc pas gênant de ne pas achever une phase calculatoire pendant la préparation. Vous êtes libre de choisir l'ordre de présentation des exercices. Il est conseillé de consacrer 20 minutes à la présentation du premier exercice et 10 minutes à celle du deuxième.

Vous devez sortir de votre oral en vous disant que vous avez donné le meilleur de vous-même, que vous avez fait le maximum. Pensez toujours à raisonner de façon positive. Tous les points sont bons à prendre !

Pour conclure, je vous invite à lire les différents rapports de jury que l'on trouve sur le site SCEI. Vous comprendrez alors ce que l'on attend de vous et vous assimilerez comment faire de votre oral un véritable atout !

Je termine par un extrait assez représentatif et optimiste des rapports des jurys.

Rapport du jury 2016

Le niveau général demeure comparable à celui des années précédentes. Les candidats sont en général bien préparés. Notons tout de même que cette moyenne cache le fait que l'écart semble se creuser, un peu plus chaque année, entre les bons candidats et les candidats moyens qui ont rencontré plus de difficultés, essentiellement par manque de maîtrise du cours. Un nombre non négligeable de candidats ne connaît pas suffisamment le cours et a besoin d'être aidé pour cette raison. Mais il est parfois surprenant de constater que ces mêmes candidats sont capables de très bien exploiter l'aide fournie. Il est de plus en plus fréquent de rencontrer des candidats capables de bien raisonner mais qui n'ont pas fait l'effort de suffisamment apprendre leur cours. C'est bien dommage. Il faut cependant reconnaître que, même si la connaissance du cours est moins bonne, et même si les aptitudes à mener des calculs à terme sont moindres, la prise d'initiatives, la mise en place d'un raisonnement et la modélisation des phénomènes semblent sensiblement améliorées, ce qui montre que les candidats possèdent un bon sens physique.

Ce livre va aussi vous permettre d'acquérir une certaine autonomie qui est très importante pour réussir son oral. Même si les professeurs sont encore très présents et que votre travail en prépa est très suivi, il faut aussi commencer à travailler par vous-même en fonction de vos objectifs.

Pour vous aider aussi lors de vos deux ou trois années de classes préparatoires, vous pourrez utiliser les livres de la collection SAVOIR & FAIRE EN PRÉPAS spécifiques à chaque filière.

Pour conclure, il est très important de travailler régulièrement les différentes matières et de bien apprendre le cours. Les concours ne se préparent pas à la dernière minute mais sur deux, voire trois ans.

Je remercie pleinement madame Karine Beaurpère pour ses conseils judicieux, sa relecture, sa disponibilité et ses encouragements.

Je remercie Valentin et Lisa, élèves en PCSI, qui ont testé certains des exercices en cours d'année.

Je remercie aussi mes étudiants de PC* et les étudiants du lycée Roosevelt qui ont testé des exercices lors des révisions ou lors des colles.

Enfin, je souhaite dédier ce livre à Nanane, ma tante, à Michel qui partage ma vie et à mes enfants Antoine, Romain et Valentin.

Bon courage à vous pour cette grande et belle aventure
et n'oubliez pas de toujours donner le meilleur de vous-même !

Tableaux récapitulatifs des exercices

Tableau récapitulatif des exercices de mécanique

	Mécanique du point ou solide	Étude énergétique	Mouvement à force centrale	Statique des fluides
Exercice 3.1				•
Exercice 3.2			•	
Exercice 4.1	•			
Exercice 4.2				•
Exercice 5.1	•			
Exercice 10.2	•			
Exercice 11.1		•		
Exercice 14.2	•	•		
Exercice 18.1	•			
Exercice 19.1	•	•		
Exercice 20.2			•	
Exercice 22.1				•
Exercice 23.1			•	
Exercice 23.2	•			
Exercice 24.1			•	
Exercice 24.2	•	•		

Tableau récapitulatif des exercices d'optique

	Lois de Descartes	Lentilles
Exercice 1.2		•
Exercice 8.1	•	
Exercice 13.2		•
Exercice 15.1	•	
Exercice 16.2		•

Tableau récapitulatif des exercices de thermodynamique

	Premier principe	Deuxième principe	Changements d'état	Machines thermiques
Exercice 2.1		•		
Exercice 6.1	•			
Exercice 7.2			•	
Exercice 9.1			•	•
Exercice 12.2	•		•	
Exercice 13.1	•			
Exercice 17.2				•
Exercice 20.1	•		•	
Exercice 21.1			•	•

Tableau récapitulatif des exercices d'électricité

	Régime transitoire	Régime sinusoïdal forcé	Filtre	Traitement du signal
Exercice 1.1		•		
Exercice 7.1		•	•	
Exercice 8.2			•	
Exercice 11.2		•	•	
Exercice 12.2			•	•
Exercice 15.2			•	
Exercice 17.1		•		
Exercice 18.2			•	
Exercice 19.2			•	•
Exercice 21.2	•			
Exercice 22.1		•		

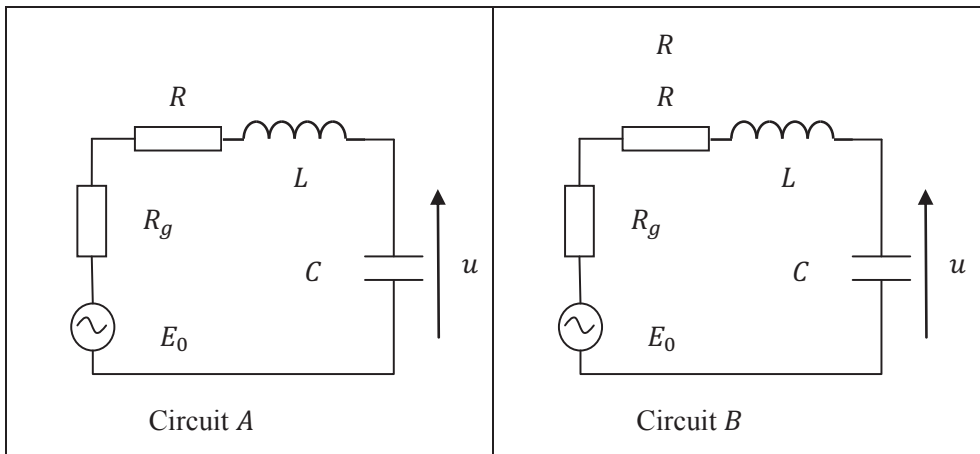
Tableau récapitulatif des exercices d'électromagnétisme et ondes

	Magnétostatique	Induction	Ondes
Exercice 2.2		•	
Exercice 5.2	•	•	
Exercice 6.2		•	
Exercice 9.2		•	
Exercice 10.1		•	
Exercice 14.1		•	
Exercice 16.1			•

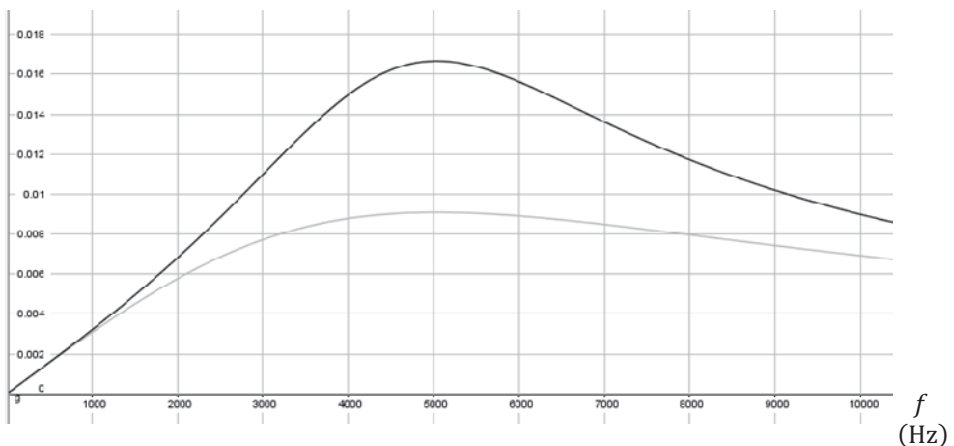
Jour n°1

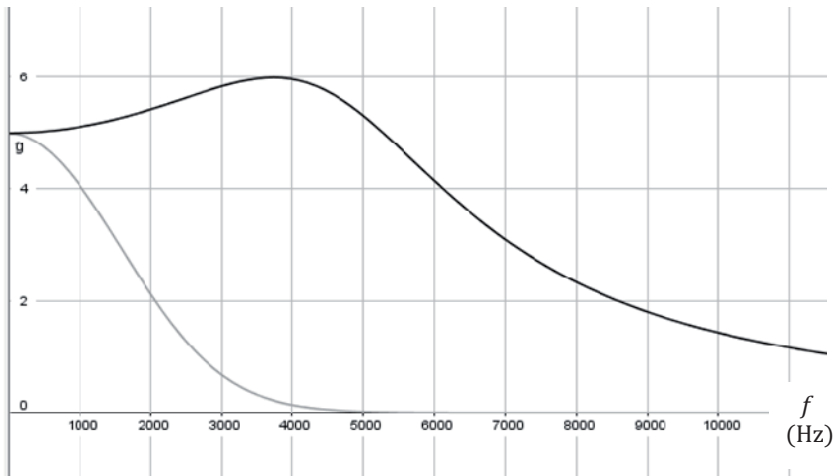
Exercice 1.1

On dispose des deux circuits notés *A* et *B*, qui sont alimentés par un GBF de résistance interne R_g . La tension fournie par le générateur idéal de tension est sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude E_0 .



Un des graphes ci-dessous représente l'amplitude de l'intensité (en A) en fonction de la fréquence f pour chacun des montages, l'autre graphe représente l'amplitude de la tension u (en V) aux bornes du condensateur en fonction de la fréquence f .





Identifier pour chaque graphe la courbe correspondant aux deux montages.

Déterminer les valeurs numériques de E_0 , R , R_g , L et C .

Exercice 1.2

On modélise un microscope par la succession de deux lentilles convergentes nommées L_1 et L_2 caractérisées par leurs distances focales $f'_1 = 5 \text{ mm}$ et $f'_2 = 3 \text{ mm}$.

La distance entre le foyer image F'_1 de la lentille L_1 et le foyer objet F_2 de la lentille L_2 vaut $\delta = 16 \text{ cm}$. Un objet AB de hauteur $h = 0,1 \text{ mm}$ est situé à gauche de L_1 .

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

La formule de conjugaison de Newton est :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2.$$

La formule du grandissement transversal est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

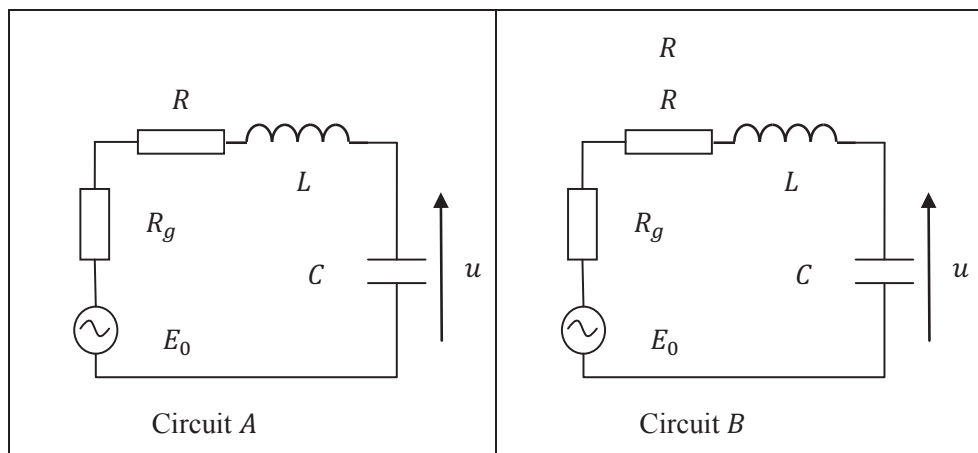
1) Où doit se trouver l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille L_1 pour qu'il n'y ait pas besoin d'accommoder ?

- 2) En déduire la grandeur algébrique $\overline{F_1'A'}$ et tracer l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille L_1 . Déterminer numériquement la position de l'objet.
- 3) Calculer le grandissement transversal lié à L_1 .
- 4) Déterminer l'angle α' sous lequel est vu l'objet à l'aide du microscope. Déterminer l'angle α sous lequel est vu l'objet sans le microscope. En déduire le grossissement défini par :

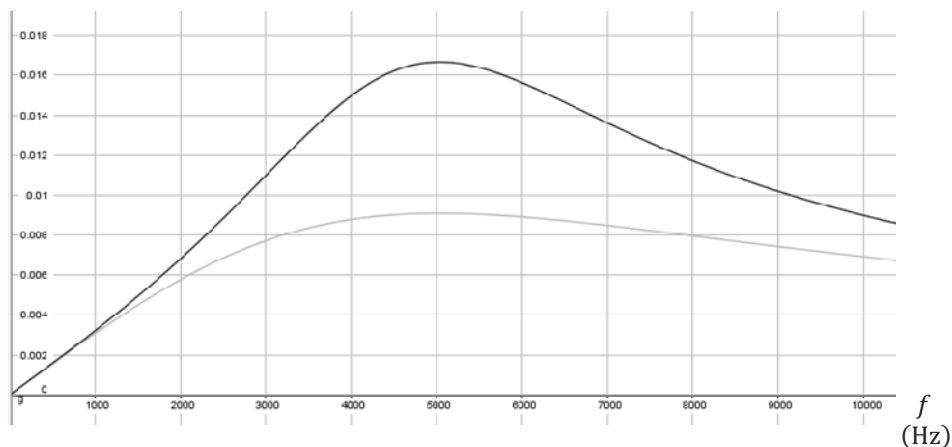
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

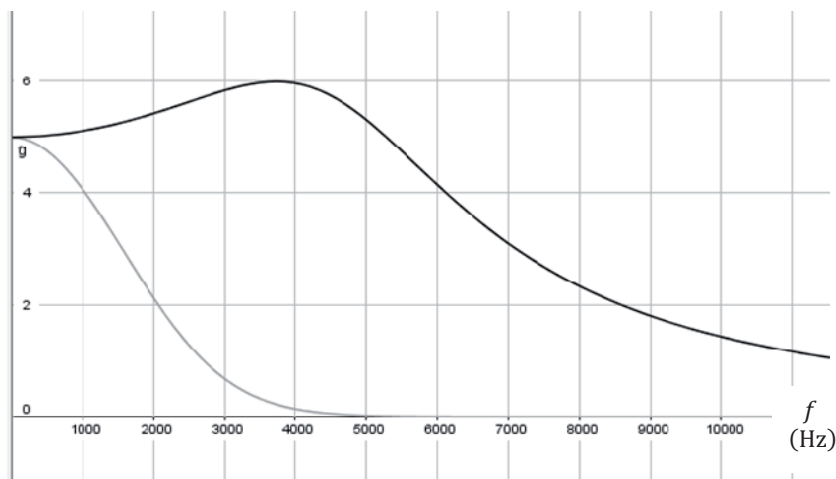
Énoncé

On dispose des deux circuits notés A et B , qui sont alimentés par un GBF de résistance interne R_g . La tension fournie par le générateur idéal de tension est sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude E_0 .



Un des graphes ci-dessous représente l'amplitude de l'intensité (en A) en fonction de la fréquence f pour chacun des montages, l'autre graphe représente l'amplitude de la tension u (en V) aux bornes du condensateur en fonction de la fréquence f .





Identifier pour chaque graphe la courbe correspondant aux deux montages.

Déterminer les valeurs numériques de E_0 , R , R_g , L et C .

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur l'électrocinétique et principalement sur le régime sinusoïdal forcé.

Il s'agit de déterminer les valeurs des composants des circuits. On peut constater qu'il s'agit dans les deux cas du circuit classique RLC .

La différence entre les deux circuits correspond à la valeur de la résistance.

Nous avons 5 inconnues et il faut donc trouver 5 équations.

↪ Déterminer l'intensité en fonction de la pulsation.

↪ Déterminer la tension aux bornes du condensateur.

↪ Utiliser les courbes afin de trouver les équations adéquates.

Corrigé

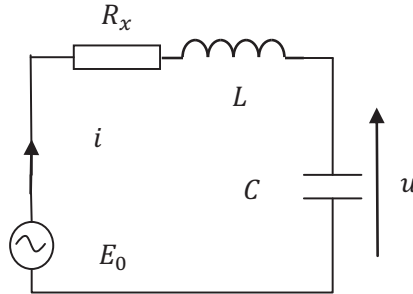
Nous constatons pour commencer que les circuits A et B sont similaires. Il n'y a que la résistance équivalente qui change. Les deux circuits sont donc des circuits RLC série. Pour le circuit A , la résistance équivalente est :

$$R_A = R_g + R.$$

Comme il y a deux résistances R en parallèle, la résistance équivalente du circuit B est :

$$R_B = R_g + \frac{R}{2}.$$

Nous avons donc le circuit suivant à étudier :



Grâce à la loi des mailles, nous en déduisons l'intensité. Nous avons donc en notations complexes :

$$\underline{E_0} = \left(R_x + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}.$$

La tension du GBF est :

$$\underline{E_0} = E_0 e^{j\omega t}.$$

L'intensité est donc :

$$\underline{i} = \frac{\underline{E_0}}{R_x + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}.$$

Le module est donc égal à :

$$I = |\underline{i}| = \frac{E_0}{\sqrt{R_x^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

Nous pouvons facilement voir que l'intensité est maximale lorsque le dénominateur est minimal. Le dénominateur est égal à la somme de deux carrés dont le premier est constant. Le minimum de ce dénominateur correspond à la valeur nulle du second terme soit :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0.$$

Nous trouvons donc la pulsation maximale :

$$\omega_{max i} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La fréquence du maximum d'intensité correspond donc à :

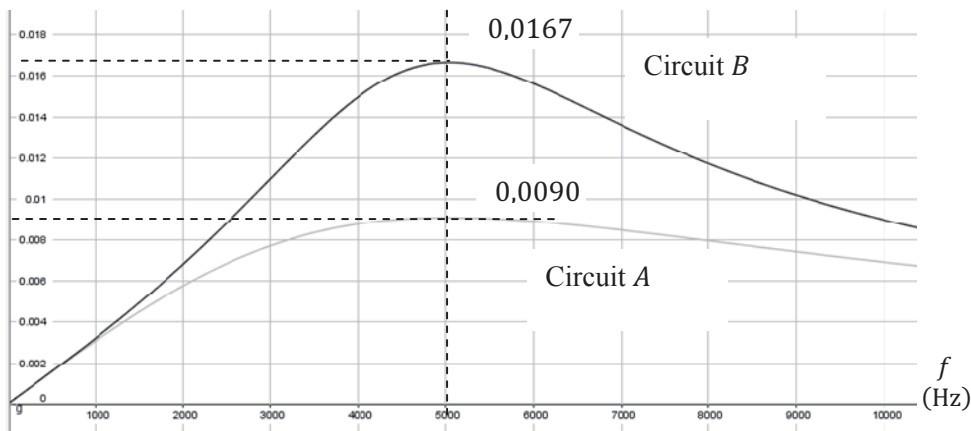
$$f_{max i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

La valeur du maximum est donc égale à :

$$I_{max} = \frac{E_0}{R_x}.$$

Nous en déduisons que le maximum est plus important pour le circuit B qui possède une résistance plus faible que le circuit A .

Nous pouvons donc identifier le graphe correspondant à l'intensité qui est le premier car il y a un maximum pour la même fréquence. La courbe noire correspond au circuit B qui possède la plus petite résistance.



Nous en déduisons les équations suivantes:

$$f_{max i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5000 \text{ Hz}$$

$$I_{maxA} = \frac{E_0}{R_A} = \frac{E_0}{R_g + R} = 0,0090 \text{ A}$$

$$I_{maxB} = \frac{E_0}{R_B} = \frac{E_0}{R_g + \frac{R}{2}} = 0,0167 \text{ A.}$$

La tension aux bornes du condensateur est obtenue en utilisant le diviseur de tension. Nous avons donc :

$$\frac{\underline{u}}{\underline{E_0}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_x + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{E_0}} = \frac{1}{jR_x C\omega - LC\omega^2 + 1}$$

Nous obtenons le module de la tension aux bornes du condensateur :

$$U = |\underline{u}| = \frac{E_0}{\sqrt{(R_x C \omega)^2 + (1 - LC \omega^2)^2}}.$$

Cherchons les extrema de cette fonction. Ils correspondent aux extrema de la fonction qui se trouve sous la racine :

$$g(\omega) = (R_x C \omega)^2 + (1 - LC \omega^2)^2.$$

Calculons la dérivée de cette fonction :

$$g'(\omega) = 2\omega(R_x C)^2 - 2LC(2\omega)(1 - LC \omega^2).$$

Nous cherchons les zéros :

$$g'(\omega) = 2\omega(R_x C)^2 - 2LC(2\omega)(1 - LC \omega^2) = 0.$$

Une solution immédiate est :

$$\omega = 0.$$

L'autre condition est :

$$(R_x C)^2 - 2LC(1 - LC \omega^2) = 0$$

$$1 - LC \omega^2 = \frac{(R_x C)^2}{2LC} = \frac{R_x^2 C}{2L}$$

$$LC \omega^2 = 1 - \frac{R_x^2 C}{2L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_x^2 C}{2L} \right).$$

Pour avoir une solution, il faut :

$$1 - \frac{R_x^2 C}{2L} > 0$$

$$R_x < \sqrt{\frac{2L}{C}} = R_{lim}.$$

Dans ce cas, la tension aux bornes du condensateur présente un maximum pour la pulsation suivante :

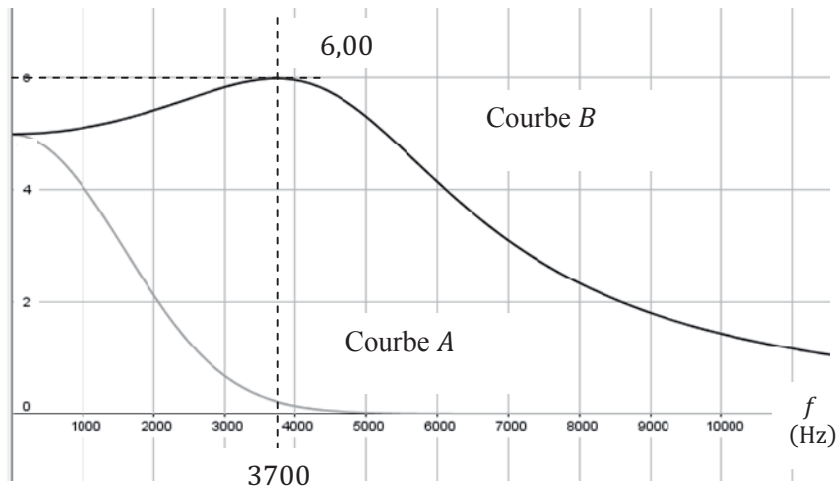
$$\omega_{max c} = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_x^2 C}{2L} \right)}$$

Et un minimum pour :

$$\omega_{min c} = 0.$$

Si la résistance est plus importante que R_{lim} , la tension aux bornes du condensateur est décroissante à partir de la pulsation nulle.

Nous pouvons identifier les courbes sur le deuxième graphe qui correspond donc bien à la tension aux bornes du condensateur. Le circuit B qui possède une résistance plus faible présente donc une résonance en tension et correspond donc à la courbe noire.



Pour la pulsation nulle, les deux courbes ont bien la même valeur soit :

$$U(0) = E_0.$$

Nous en déduisons donc la valeur de la tension du GBF soit :

$$\boxed{E_0 = 5 \text{ V.}}$$

La fréquence du maximum pour le circuit B est égale à :

$$f_{\max c} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_B^2 C}{2L} \right)}$$

$$f_{\max c} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{\left(R_g + \frac{R}{2} \right)^2 C}{2L} \right)} = 3700 \text{ Hz.}$$

Nous avons donc trouvé 5 équations qui sont :

$$E_0 = 5 \text{ V}$$

$$f_{\max i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5000 \text{ Hz}$$

$$f_{maxc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{\left(R_g + \frac{R}{2}\right)^2 C}{2L} \right)} = 3700 \text{ Hz}$$

$$I_{maxA} = \frac{E_0}{R_A} = \frac{E_0}{R_g + R} = 0,0090 \text{ A}$$

$$I_{maxB} = \frac{E_0}{R_B} = \frac{E_0}{R_g + \frac{R}{2}} = 0,0167 \text{ A.}$$

Reste à résoudre ce système. On peut commencer par déterminer les résistances. Nous avons :

$$R_g + R = \frac{E_0}{I_{maxA}}$$

$$R_g + \frac{R}{2} = \frac{E_0}{I_{maxB}}.$$

En faisant la différence de ces deux équations, on trouve :

$$\frac{R}{2} = E_0 \left(\frac{1}{I_{maxA}} - \frac{1}{I_{maxB}} \right)$$

$$\boxed{R = 2E_0 \left(\frac{1}{I_{maxA}} - \frac{1}{I_{maxB}} \right)}$$

$$R_g = \frac{E_0}{I_{maxA}} - 2E_0 \left(\frac{1}{I_{maxA}} - \frac{1}{I_{maxB}} \right)$$

$$\boxed{R_g = E_0 \left(\frac{2}{I_{maxB}} - \frac{1}{I_{maxA}} \right)}.$$

Les applications numériques donnent :

$$\boxed{R = 2 \times 5 \left(\frac{1}{0,0091} - \frac{1}{0,0167} \right) = 500,1 \, \Omega}$$

$$\boxed{R_g = 5 \left(\frac{2}{0,0167} - \frac{1}{0,0091} \right) = 49,3 \, \Omega.}$$

Nous déterminons maintenant L et C :

$$f_{maxc} = f_{maxi} \sqrt{\left(1 - \frac{\left(R_g + \frac{R}{2}\right)^2 C}{2L} \right)} = f_{maxi} \sqrt{\left(1 - \frac{\left(\frac{E_0}{I_{maxB}}\right)^2 C}{2L} \right)}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_{maxi}^2 C}$$

$$f_{maxc}^2 = f_{maxi}^2 \left(1 - 2\pi^2 \left(\frac{E_0}{I_{maxB}} \right)^2 f_{maxi}^2 C^2 \right)$$

$$\frac{f_{maxc}^2}{f_{maxi}^2} = 1 - 2\pi^2 \left(\frac{E_0}{I_{maxB}} \right)^2 f_{maxi}^2 C^2$$

$$2\pi^2 \left(\frac{E_0}{I_{maxB}} \right)^2 f_{maxi}^2 C^2 = 1 - \frac{f_{maxc}^2}{f_{maxi}^2}$$

$$C^2 = \frac{1}{2\pi^2 f_{maxi}^2 \left(\frac{E_0}{I_{maxB}} \right)^2} \left(1 - \frac{f_{maxc}^2}{f_{maxi}^2} \right)$$

$$C = \frac{1}{\pi f_{maxi} \left(\frac{E_0}{I_{maxB}} \right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_{maxc}^2}{f_{maxi}^2} \right)}$$

L'application numérique donne :

$$C = \frac{1}{\pi \times 5000 \times \left(\frac{5}{0,0167} \right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(3700)^2}{(5000)^2} \right)} = 10^{-7} \text{ F}$$

$$\boxed{C = 100 \text{ nF.}}$$

On peut maintenant en déduire l'inductance :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_{maxi}^2 C}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \times (5000)^2 \times 10^{-7}} = 0,0101 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 10,1 \text{ mH.}}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des propriétés du circuit RLC série.

♡ Il faut se souvenir de la loi des mailles et du diviseur de tension.

Rapport du jury 2016

Les difficultés majeures se concentrent sur les règles de base des circuits, que ce soit la loi des mailles ou la loi des nœuds, même pour des circuits très simples.

♡ Il faut se souvenir des calculs en complexes pour les fonctions de transfert.

Rapport du jury 2016

En particulier, le jury note des difficultés plus importantes dans la mise en forme des fonctions de transferts pour obtenir l'expression d'une pulsation centrale ou de coupure ou (et) d'un facteur de qualité.

♡ Il faut se souvenir des impédances des différents éléments en notations complexes.

Formulaire

- Les impédances complexes :

$$Z_R = R$$

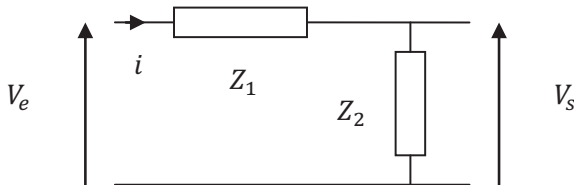
$$Z_L = jL\omega$$

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Relation entre la pulsation et la fréquence :

$$\omega = 2\pi f.$$

- Diviseur de tension :



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- Loi des mailles :

$$V_e = Z_1 i + V_s.$$

- Module d'un nombre complexe $Z = a + jb$:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Énoncé

On modélise un microscope par la succession de deux lentilles convergentes nommées L_1 et L_2 caractérisées par leurs distances focales $f'_1 = 5 \text{ mm}$ et $f'_2 = 3 \text{ mm}$.

La distance entre le foyer image F'_1 de la lentille L_1 et le foyer objet F_2 de la lentille L_2 vaut $\delta = 16 \text{ cm}$. Un objet AB de hauteur $h = 0,1 \text{ mm}$ est situé à gauche de L_1 .

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

La formule de conjugaison de Newton est :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2.$$

La formule du grandissement transversal est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

- 1) Où doit se trouver l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille L_1 pour qu'il n'y ait pas besoin d'accommoder ?
- 2) En déduire la grandeur algébrique $\overline{F'_1A'}$ et tracer l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille L_1 . Déterminer numériquement la position de l'objet.
- 3) Calculer le grandissement transversal lié à L_1 .
- 4) Déterminer l'angle α' sous lequel est vu l'objet à l'aide du microscope. Déterminer l'angle α sous lequel est vu l'objet sans le microscope. En déduire le grossissement défini par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice d'optique géométrique qui fait appel aux connaissances acquises lors des travaux pratiques.

- 1) Il faut sans faire de calculs déterminer la position de l'image intermédiaire.
 $\hookrightarrow$ L'œil n'accommoder pas lorsqu'il observe un objet à l'infini, c'est-à-dire que l'objet se situe dans le plan focal image de la lentille.
- 2) Il s'agit de procéder à une construction géométrique et d'utiliser une relation de conjugaison pour contrôler. Impossible de faire un schéma à l'échelle.

↪ Afin d'obtenir l'objet à partir de la position de l'image, il suffit de tracer deux rayons.

↪ Utiliser la relation de conjugaison la mieux adaptée.

3) Il faut déterminer le grandissement.

↪ Utiliser le schéma et les formules données.

4) Pour déterminer l'angle sous lequel est vu l'objet, il faut tracer un rayon sortant du système.

↪ Utiliser la construction géométrique.

Pour déterminer l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu, il faut se rappeler de la distance minimale de vision pour l'œil.

↪ Pas de difficulté pour le calcul du grossissement.

Corrigé

1) L'œil peut regarder un objet sans accommoder lorsque ce dernier se trouve à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire $A'B'$ soit dans le plan foyer objet de la seconde lentille. C'est-à-dire que le point A' se trouve au foyer objet F_2 .

2) Nous avons donc, en utilisant la première question :

$$\overline{F_1'A'} = \overline{F_1'F_2}.$$

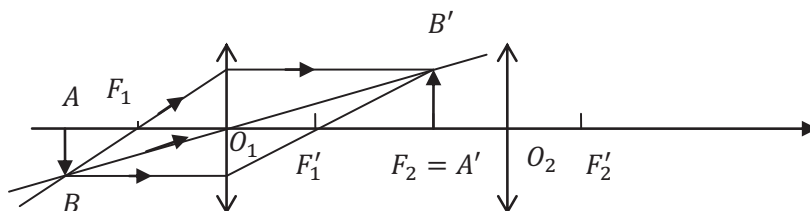
Pour la construction géométrique, il faut commencer par placer l'image qui se trouve au foyer objet de la seconde lentille et en déduire la position de l'objet.

Pour trouver la position de l'objet, nous traçons deux rayons : celui qui passe par le centre (il n'est pas dévié), le rayon sortant parallèle à l'axe optique et passant par le point B' provient du foyer objet de la première lentille.

L'intersection de ces deux rayons donne la position de l'objet.

Afin de contrôler la position de l'image, nous pouvons tracer le rayon passant par le point B et qui est parallèle à l'axe optique. Il sort de la lentille par le foyer image.

Le dessin n'est pas réalisé à l'échelle.



Nous pouvons à l'aide de la loi de Newton déterminer la position de l'objet. Nous avons donc :

$$\overline{F_1'A'} \cdot \overline{F_1A} = -f_1'^2$$

$$\overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{F_1 F_2} = -\frac{f_1'^2}{\delta}.$$

L'application numérique donne :

$$\overline{F_1 A} = -\frac{5^2}{160} = -0,156 \text{ mm.}$$

L'application numérique est faite en mm.

3) Le grandissement transversal est donné par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

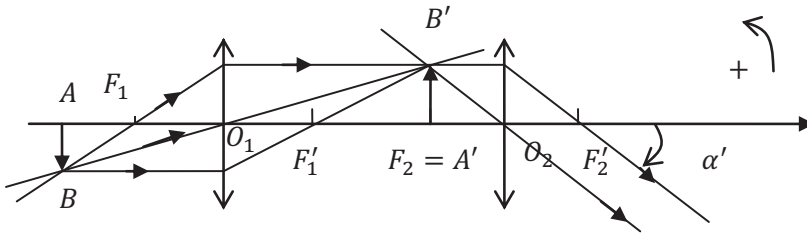
En utilisant le troisième rayon tracé sur le schéma de la question précédente et en utilisant les notations adaptées, nous avons :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1 F_2}}{\overline{F_1 O_1}} = -\frac{\delta}{f_1'}.$$

L'application numérique donne :

$$\gamma = -\frac{160}{5} = -32.$$

4) Afin de déterminer l'angle sous lequel est vu l'objet à l'aide du microscope, il faut poursuivre le schéma de la question 2) en traçant le rayon sortant du système. Nous avons donc le schéma suivant :



En effet le rayon qui passe par B' et qui est parallèle à l'axe optique passe par le foyer image de la seconde lentille F_2' . Nous pouvons aussi tracer celui qui passe par B' et le centre de la seconde lentille. Ce dernier n'est pas dévié.

Les deux rayons ressortent avec un angle α' . L'image se forme bien à l'infini.

Nous déduisons d'après le schéma que :

$$\tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{f_2'} = \gamma \frac{\overline{AB}}{f_2'}.$$

En utilisant les données, nous avons :

$$\tan \alpha' = \gamma \frac{h}{f_2'}.$$

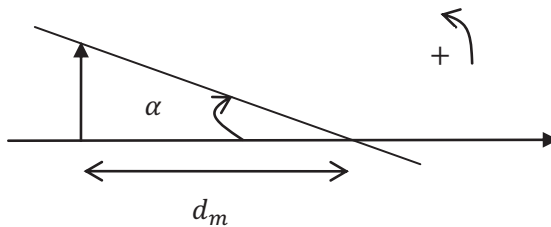
L'application numérique donne :

$$\tan \alpha' = -32 \frac{0,1}{3} = -1,06$$

$$\alpha' = -0,815 \text{ rad.}$$

Nous remarquons que nous ne sommes plus dans l'approximation des petits angles. Les approximations de Gauss ne sont plus vérifiées. Les formules, utilisées dans ce cadre, ne sont plus valables.

L'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu est donné par le schéma suivant :



La distance minimale pour la vision nette d'un œil normal est prise égale à $d_m = 25 \text{ cm}$. L'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu est donc :

$$\tan \alpha = -\frac{h}{d_m}.$$

Nous avons choisi de définir des angles algébriques. Ce n'est pas une obligation.

L'application numérique donne :

$$\tan \alpha = -\frac{0,1}{250} = -0,0004.$$

Nous sommes ici dans l'approximation des petites angles donc :

$$\tan \alpha \approx \alpha = -0,0004 \text{ rad.}$$

Nous en déduisons le grossissement du microscope :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-0,815}{-0,0004} = 2037.$$

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir des constructions géométriques dans l'approximation de Gauss.

Rapport du jury 2016

Tracer une image géométrique par une lentille divergente relève pour la plupart des candidats d'une mission impossible. Les conventions traits pleins/pointillés pour les rayons vrais/virtuels sont peu respectées. L'utilisation d'un foyer secondaire dans le tracé d'un rayon émergent est souvent source d'erreurs.

♡ Il faut se souvenir que les grandeurs utilisées sont algébriques.

♡ Il faut se souvenir des travaux pratiques d'optique.

♡ Il faut se souvenir des caractéristiques de l'œil.

Rapport du jury 2016

Les notions d'objet virtuel et d'accommodation sont souvent mal comprises. Ainsi, un objet situé après la lentille est virtuel si la lentille est convergente, mais réel si la lentille est divergente !

♡ Il faut se souvenir d'utiliser les formules de conjugaison les mieux adaptées.

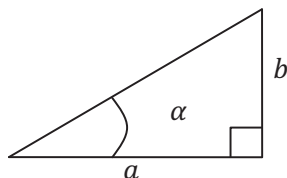
Rapport du jury 2016

Les relations de Descartes sont systématiquement privilégiées à celles de Newton, alors que parfois le calcul est vraiment immédiat avec ces dernières. De plus, bien qu'elles soient systématiquement données dans l'énoncé, il y a beaucoup d'erreurs de signe.

Formulaire

- Expression de la tangente :

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{b}{a}.$$



- Formule de conjugaison de Descartes pour une lentille mince dans l'approximation de Gauss :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

- La formule de conjugaison de Newton pour une lentille mince dans l'approximation de Gauss :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2.$$

- La formule du grandissement transversal est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

- Approximations de Gauss : les rayons sont paraxiaux (faiblement inclinés par rapport à l'axe optique) et passent au voisinage des sommets des dioptries.

Jour n°2

Exercice 2.1

On se propose d'étudier diverses transformations d'un gaz parfait entre un état A caractérisé par une pression P_A et un état B caractérisé par une pression P_B . Les deux états sont à une même température T .

On considère deux transformations réversibles successives. La première est adiabatique entre l'état A et un état intermédiaire C . La seconde est isobare entre l'état C et l'état B .

- 1) Déterminer les capacités thermiques molaires du gaz parfait.
- 2) Calculer les variations d'entropie pour les sous-transformations décrites ci-dessus. Déterminer ΔS_1 , la variation totale d'entropie pour ce premier chemin en fonction de n , R , P_A et P_B .
- 3) Déterminer une transformation réversible que l'on caractérisera entre l'état A et l'état B . Exprimer ΔS_2 , la variation d'entropie sur ce second chemin.
- 4) On considère une transformation irréversible de A à B . Que vaut ΔS_3 , la variation d'entropie dans ce cas ?
- 5) Calculer les différentes variations d'entropie pour $P_A = 5$ bars, $P_B = 1$ bar, $n = 1$ mol, $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- 6) Représenter les états A , B et C dans un diagramme de Clapeyron.

Entropie pour un gaz parfait :

$$S = S_0 + nc_P \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}.$$

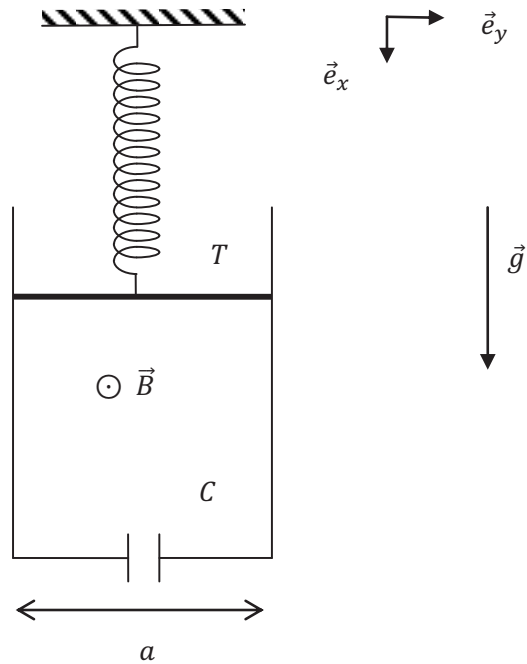
Exercice 2.2

Un ressort, de longueur à vide l_0 , de raideur k , est fixé à son extrémité supérieure. Il porte une tige conductrice T , de masse m . Tous les déplacements se font dans le plan vertical de la figure. Le système est placé dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, perpendiculaire au plan de la figure. Ce dernier est créé par un dispositif non représenté sur le schéma.

La tige T glisse sans frottement le long de deux rails verticaux, distants de a , parallèles et conducteurs. Le contact électrique est assuré à chaque instant.

Le circuit électrique est fermé grâce à un condensateur de capacité C . La résistance électrique du circuit est négligeable.

- 1) Quelle est la position d'équilibre de la tige T ?
- 2) Déterminer la période des oscillations de la tige T .
- 3) Évaluer l'ordre de grandeur de cette période si l'on utilise des composants classiques d'une salle de travaux pratique de prépa.



Énoncé

On se propose d'étudier diverses transformations d'un gaz parfait entre un état A caractérisé par une pression P_A et un état B caractérisé par une pression P_B . Les deux états sont à une même température T .

On considère deux transformations réversibles successives. La première est adiabatique entre l'état A et un état intermédiaire C . La seconde est isobare entre l'état C et l'état B .

- 1) Déterminer les capacités thermiques molaires du gaz parfait.
- 2) Calculer les variations d'entropie pour les sous-transformations décrites ci-dessus. Déterminer ΔS_1 , la variation totale d'entropie pour ce premier chemin en fonction de n , R , P_A et P_B .
- 3) Déterminer une transformation réversible que l'on caractérisera entre l'état A et l'état B . Exprimer ΔS_2 , la variation d'entropie sur ce second chemin.
- 4) On considère une transformation irréversible de A à B . Que vaut ΔS_3 , la variation d'entropie dans ce cas ?
- 5) Calculer les différentes variations d'entropie pour $P_A = 5$ bars, $P_B = 1$ bar, $n = 1$ mol, $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- 6) Représenter les états A , B et C dans un diagramme de Clapeyron.

Entropie pour un gaz parfait :

$$S = S_0 + n c_p \ln \frac{T}{T_0} - n R \ln \frac{P}{P_0}.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur le programme de thermodynamique. Il s'agit d'utiliser le deuxième principe de la thermodynamique.

- 1) Cette question est une question de cours. Il y a deux capacités thermiques à déterminer.

↪ Utiliser la définition du coefficient γ et la relation de Mayer.

- 2) Il s'agit de déterminer la variation d'entropie pour la transformation donnée.

↪ Penser à bien définir le système. Déterminer l'état initial et l'état final. Utiliser la formule de l'entropie donnée.

- 3) Il faut encore déterminer l'état initial et l'état final du système et appliquer la formule donnée.

↪ Pas de difficultés.

4) Il faut se rappeler que l'entropie est une fonction d'état.

↪ La variation d'entropie ne dépend pas du chemin suivi.

5) Cette question est l'application numérique des questions précédentes.

↪ Attention aux unités.

6) Il s'agit de représenter les transformations dans un diagramme de Clapeyron.

↪ Le diagramme de Clapeyron correspond au diagramme (P, V) .

Corrigé

1) Le coefficient γ est défini en fonction des capacités thermiques du gaz par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}.$$

La relation de Mayer donne pour les capacités thermiques molaires :

$$c_P - c_V = R.$$

La résolution de ce système de deux équations donne :

$$c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Nous pouvons donner directement les valeurs pour un gaz parfait monoatomique :

$$c_P = \frac{5R}{2}$$

$$c_V = \frac{3R}{2}.$$

Pour un gaz parfait diatomique, nous avons :

$$c_P = \frac{7R}{2}$$

$$c_V = \frac{5R}{2}.$$

2) La première sous-transformation est adiabatique réversible. Elle est donc isentropique :

$$\Delta S_{AC} = 0.$$

La seconde sous-transformation est isobare. En utilisant la formule de l'entropie, nous obtenons :

$$\Delta S_{CB} = n c_P \ln \frac{T_B}{T_C} = n c_P \ln \frac{T}{T_C}.$$

Reste à déterminer la température du point intermédiaire T_C . Pour cela nous utilisons la loi de Laplace entre les points A et C :

$$PV^\gamma = Cste.$$

Ce sont les variables P et T qui nous intéressent soit :

$$\begin{aligned} P^{1-\gamma} T^\gamma &= Cste. \\ P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma &= P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma \\ T_C &= T_A \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \end{aligned}$$

En utilisant les notations du sujet :

$$T_C = T \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Il suffit de reporter dans l'expression de la variation d'entropie :

$$\begin{aligned} \Delta S_{CB} &= n c_P \ln \frac{T}{T \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = n c_P \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = n c_P \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right) \\ \Delta S_{CB} &= n R \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right). \end{aligned}$$

L'entropie totale pour la transformation ACB vaut :

$$\Delta S_1 = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = n R \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right).$$

3) Comme la température des états initial et final est la même ce cas, il suffit d'utiliser l'expression de l'entropie et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= -n R \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right) \\ \Delta S_2 &= n R \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right). \end{aligned}$$

4) Dans le cas de la transformation irréversible, comme les états initial et final sont les mêmes que pour la transformation réversible, la variation d'entropie est donc la même. En effet, elle ne dépend pas de la transformation. Nous avons donc :

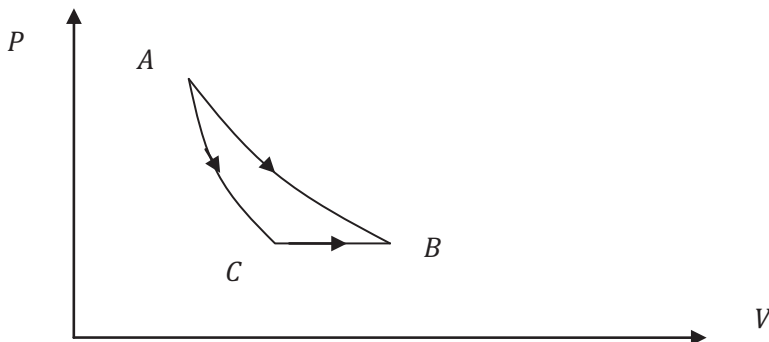
$$\Delta S_3 = n R \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right).$$

Nous obtenons donc bien dans les trois cas la même variation d'entropie. L'entropie est une fonction d'état et ne dépend pas du chemin suivi.

5) L'application numérique donne :

$$\begin{aligned} \Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3 &= n R \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right) = 1 \times 8,32 \times \ln \left(\frac{5}{1} \right) \\ \Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3 &= 13,4 \text{ J.K}^{-1}. \end{aligned}$$

6) Nous savons que la pente de l'adiabatique est supérieure à celle de l'isotherme. Le diagramme de Clapeyron est le suivant :



L'isotherme a comme équation dans le diagramme de Clapeyron :

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{Cste}{V}.$$

L'isentropique a comme équation :

$$P = \frac{Cste}{V^\gamma}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir du cours, de la loi de Laplace, des définitions des capacités thermiques pour le gaz parfait.

Rapport du jury 2016

Les conditions d'application des formules sont ignorées (Laplace est utilisée « à toutes les sauces », les définitions de C_p et C_v en fonction de R sont utilisées pour les solides...) et les candidats ont beaucoup de difficultés à exploiter correctement un énoncé et à le traduire en équations.

♡ Il faut se souvenir de bien définir le système ainsi que les états initial et final.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement l'expression de l'entropie et que l'entropie est une fonction d'état.

Rapport du jury 2016

Il est important de rappeler qu'il faut avoir compris ce qu'est une grandeur d'état, qu'il existe la possibilité de choisir un chemin différent (en conservant bien sûr les mêmes états de départ et d'arrivée) permettant ainsi d'adapter les formules données et non pas de choisir sans argumentation une formule quasi au hasard parce que se rapprochant au plus du problème.

♡ Il faut se souvenir de ce que représente le diagramme de Clapeyron.

Formulaire

- Capacité thermique molaire à volume constant pour un gaz parfait :

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

- Capacité thermique molaire à pression constante pour un gaz parfait :

$$c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

- Relation de Mayer :

$$c_P - c_V = R.$$

- Entropie du gaz parfait S en fonction de l'entropie S_0 correspondant à l'état (T_0, V_0, P_0) :

$$S = S_0 + nc_P \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0} = S_0 + nc_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}.$$

- Équation d'état du gaz parfait :

$$PV = nRT.$$

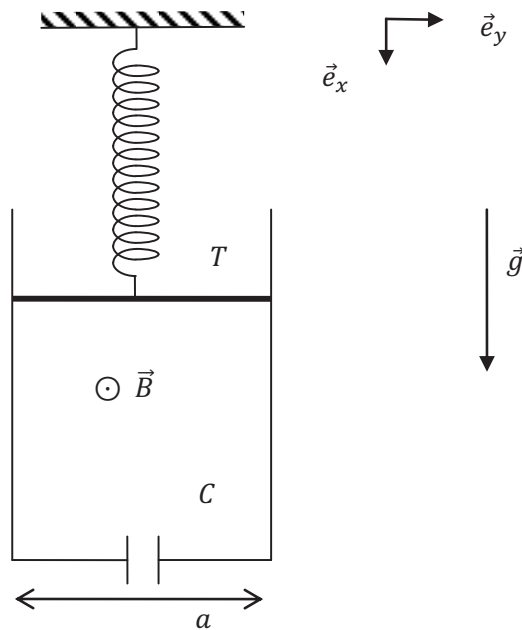
Énoncé

Un ressort, de longueur à vide l_0 , de raideur k , est fixé à son extrémité supérieure. Il porte une tige conductrice T , de masse m . Tous les déplacements se font dans le plan vertical de la figure. Le système est placé dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, perpendiculaire au plan de la figure. Ce dernier est créé par un dispositif non représenté sur le schéma.

La tige T glisse sans frottement le long de deux rails verticaux, distants de a , parallèles et conducteurs. Le contact électrique est assuré à chaque instant.

Le circuit électrique est fermé grâce à un condensateur de capacité C . La résistance électrique du circuit est négligeable.

- 1) Quelle est la position d'équilibre de la tige T ?
- 2) Déterminer la période des oscillations de la tige T .
- 3) Évaluer l'ordre de grandeur de cette période si l'on utilise des composants classiques d'une salle de travaux pratique de prépa.

**Analyse stratégique de l'énoncé**

Il s'agit d'un exercice portant sur la mécanique et l'induction. Il faut penser à analyser le mouvement de la tige.

- 1) Il s'agit dans un premier temps de déterminer la position d'équilibre. Dans ce cas il n'y a pas de mouvement donc pas de phénomène d'induction. Bien définir le système et faire le bilan des forces.

↪ Utiliser la deuxième loi de Newton appliquée à la tige.

2) Lorsque la tige oscille, elle est en mouvement dans un champ magnétique. Nous avons donc un phénomène d'induction car le flux du champ magnétique est variable. Il y a donc apparition d'une fem induite et donc d'un courant dans le circuit. N'oubliez pas la force de Laplace exercée sur la tige.

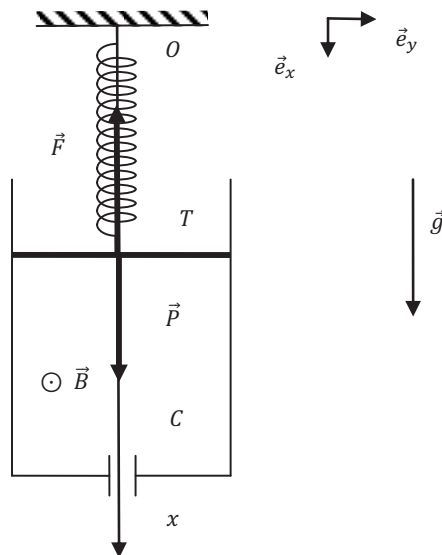
↪ Calculer le flux à travers le circuit. Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique.

3) Il s'agit de procéder à l'application numérique en donnant des ordres de grandeurs réalistes.

↪ Sans difficulté.

Corrigé

1) Pour déterminer la position d'équilibre de la tige, nous commençons par déterminer les forces qui s'exercent sur le système constitué par la tige. Le référentiel est bien entendu galiléen. Cette dernière est soumise au poids et à la force de rappel du ressort.



Comme il s'agit d'un équilibre, il n'y a pas de mouvement, donc il n'y a pas de phénomènes d'induction.

Le poids est donc égal à :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x.$$

La force de rappel du ressort est donnée par :

$$\vec{F} = -k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})\vec{e}_x = -k(x - l_0)\vec{e}_x.$$

L'origine est prise au niveau du support.

À l'équilibre, nous avons :

$$\vec{P} + \vec{F} = 0.$$

En projetant sur l'axe Ox , nous obtenons :

$$mg - k(x - l_0) = 0$$

La position de la tige à l'équilibre est donc :

$$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

Il est logique de trouver que le ressort est étiré par rapport à sa longueur à vide.

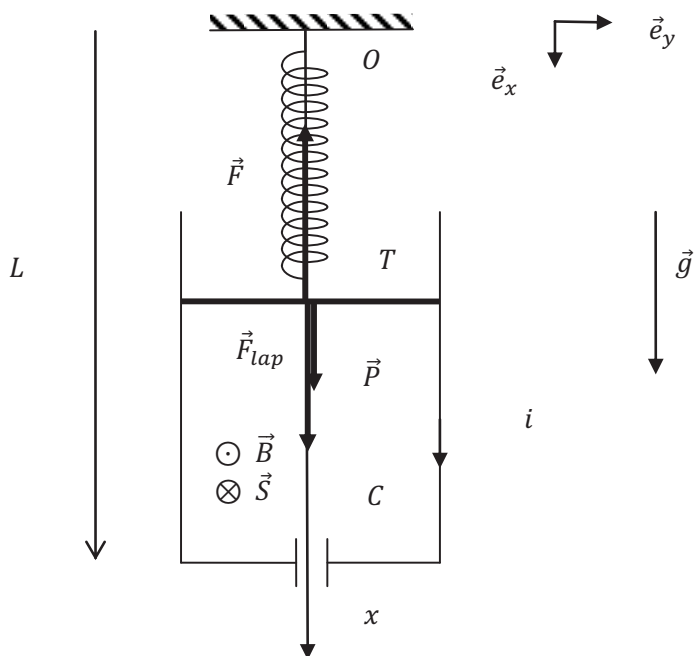
2) Maintenant, nous cherchons la période des oscillations de la tige. La tige est alors mobile dans un champ magnétique. Il y a donc variation du flux magnétique dans le circuit, donc apparition d'une fem induite et donc passage d'un courant induit. Ce dernier crée une force de Laplace au niveau de la tige.

Il faut penser à orienter de façon arbitraire le circuit.

Dans le bilan des forces, il faut donc ajouter cette force de Laplace.

Nous avons donc le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ qui est inchangé, la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$ qui est inchangée et la force de Laplace qui vaut :

$$\vec{F}_{lap} = ia\vec{e}_y \wedge \vec{B} = iaB\vec{e}_x.$$



L'équation mécanique s'obtient en appliquant la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{lap}.$$

En projection sur l'axe Ox , il reste :

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0) + iaB.$$

Il faut maintenant déterminer le courant i . Pour cela, nous commençons par calculer le flux du champ magnétique :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -BS.$$

Bien faire attention à l'orientation des vecteurs.

La surface du circuit est égale, en fonction de la longueur totale L à :

$$S = a(L - x).$$

Le flux est donc :

$$\phi = -Ba(L - x).$$

La fem est donc d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{x}.$$

L'équation électrique est donc en utilisant la loi des mailles et en négligeant la résistance :

$$e = \frac{q}{C}.$$

L'intensité i est donnée en fonction de la charge par :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{de}{dt} = -CBa\ddot{x}.$$

Nous pouvons donc reprendre l'équation du mouvement et remplacer l'expression du courant :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - k(x - l_0) - (CBa\ddot{x})aB \\ \ddot{x}(m + CB^2a^2) + kx &= mg + kl_0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m + CB^2a^2}x &= \frac{mg + kl_0}{m + CB^2a^2}. \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω telle que :

$$\omega^2 = \frac{k}{m + CB^2a^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + CB^2a^2}}.$$

La période est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m + CB^2a^2}{k}}.$$

La période est modifiée par les phénomènes d'induction. Elle augmente en accord avec la loi de Lenz. En effet la loi de Lenz dit que les phénomènes s'opposent à ceux qui lui ont donné naissance.

Le mouvement oscillatoire est donc ralenti, la fréquence diminue et la période augmente.

3) Reste à faire les applications numériques en estimant les grandeurs. Le champ magnétique produit par un aimant en U est de l'ordre de 0,1 T. La distance entre les rails est de l'ordre de 5 cm. Les capacités que l'on trouve au labo sont de l'ordre de 100 nF. La masse de la tige est de l'ordre de 20 g. La raideur du ressort est de l'ordre de 1 N.m⁻¹.

$$CB^2a^2 = 100 \cdot 10^{-9} \times (0,1 \times 0,05)^2 = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ kg}.$$

Nous sommes donc dans le cas où :

$$m \gg CB^2a^2.$$

L'effet de l'induction est donc négligeable et la période des oscillations est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,02}{0,1}} = 2,8 \text{ s.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la deuxième loi de Newton.

♡ Il faut se souvenir qu'il est important d'analyser le problème d'induction avant de se lancer dans les calculs.

Rapport du jury 2016

Pour les sujets d'induction (parfois totalement ignorée !), beaucoup de candidats consciencieux se sont lancés dans une discussion préalable et ont exposé leur vision de l'évolution des systèmes en utilisant la loi de Lenz ; les examinateurs leur en sont reconnaissants et ont beaucoup apprécié ce genre de discussion. Les candidats oublient toutefois de valider les résultats obtenus par le calcul dans la suite et passent à côté de beaucoup d'erreurs de signe.

Formulaire

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}.$$

- Force de rappel du ressort :

$$\vec{F} = \pm k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})\vec{e}_x.$$

Le signe dépend de l'orientation de l'axe.

- Force de Laplace :

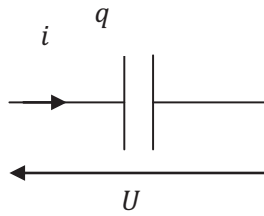
$$\vec{F}_{lap} = i\vec{L} \wedge \vec{B}.$$

- Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

- Tension aux bornes du condensateur en convention récepteur :

$$U = \frac{q}{C} ; i = \frac{dq}{dt}.$$



Jour n°3

Exercice 3.1

L'air est assimilé à un gaz parfait et la pesanteur est supposée constante.

L'air est composé de 78% de diazote, de 21% de dioxygène et de 1% d'argon. Les masses molaires sont : $M(\text{Ar}) = 18 \text{ g. mol}^{-1}$, $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g. mol}^{-1}$ et $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g. mol}^{-1}$.

Le volume molaire de l'air est égal à $22,4 \text{ L. mol}^{-1}$ dans les conditions normales de température et de pression.

- 1) Montrer que $R = 8,31 \text{ uSI}$ et déterminer son unité.
- 2) Déterminer la masse molaire de l'air.
- 3) Donner la loi des gaz parfaits et établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère isotherme.
- 4) Calculer la pression à l'altitude de 10 km. Commenter.

Exercice 3.2

- 1) Définir ce qu'est un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant $g_0 = 9,8 \text{ m. s}^{-2}$, $R_T = 6378 \text{ km}$ et la durée du jour sidéral $j_s = 86164 \text{ s}$.
- 2) Calculer l'énergie minimale à fournir pour faire varier l'altitude du satellite de 50 km.

Énoncé

L'air est assimilé à un gaz parfait et la pesanteur est supposée constante.

L'air est composé de 78% de diazote, de 21% de dioxygène et de 1% d'argon. Les masses molaires sont : $M(\text{Ar}) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le volume molaire de l'air est égal à $22,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ dans les conditions normales de température et de pression.

- 1) Montrer que $R = 8,31 \text{ uSI}$ et déterminer son unité.
- 2) Déterminer la masse molaire de l'air.
- 3) Donner la loi des gaz parfaits et établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère isotherme.
- 4) Calculer la pression à l'altitude de 10 km. Commenter.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur la statique des fluides qui est au programme de PCSI et PTSI. Il est au programme de MP. C'est un grand classique.

1) Cette première question est abordable par tous car il s'agit d'utiliser la loi des gaz parfaits et de connaître les conditions normales de température et de pression.

↪ Aucune difficulté si l'on prend garde aux unités.

2) Là encore une question simple. Il s'agit de déterminer la masse molaire de l'air.

↪ Utiliser la composition de l'air donnée et comparer le résultat à celui que vous connaissez.

3) Il s'agit d'écrire l'équation de la statique des fluides pour un gaz compressible.

↪ Projeter l'équation vectorielle sur l'axe vertical et exprimer toutes les grandeurs en fonction de P et z . Puis intégrer cette équation aux variables séparables.

4) Il s'agit de procéder à l'application numérique.

↪ Attention aux unités.

Corrigé

1) Le gaz parfait vérifie la loi suivante :

$$PV = nRT$$

$$R = \frac{PV}{nT}.$$

Dans les conditions normales de température et de pression nous avons :

$$P = 1,013 \text{ bar} = 101300 \text{ Pa.}$$

$$\frac{V}{n} = 22,4 \text{ L} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$T = 273 \text{ K.}$$

Ne pas confondre avec les conditions standards utilisées en chimie.

L'application numérique donne :

$$R = \frac{101300 \times 22,4 \cdot 10^{-3}}{273} = 8,31 \text{ J. K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Pour trouver l'unité, il suffit de remarquer que le produit PV est homogène à un travail.

Nous retrouvons bien la valeur connue pour la constante des gaz parfaits.

2) La masse molaire de l'air est :

$$M_{air} = 0,78 M_{N_2} + 0,21 M_{O_2} + 0,01 M_{Ar}$$

$$M_{air} = 0,78 \times 28 + 0,21 \times 32 + 0,01 \times 18$$

$$M_{air} = 28,74 \text{ g. mol}^{-1}.$$

Le résultat est pertinent puisque l'on retient souvent la valeur de 29 g. mol⁻¹.

3) La loi de la statique des fluides est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}.$$

Comme le poids est uniquement suivant la verticale, nous pouvons donc projeter sur un axe vertical ascendant. Nous obtenons :

$$-\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Reste maintenant à déterminer la masse volumique de l'air en supposant que le gaz est parfait :

$$PV = nRT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM_{air}}{V} = \frac{PM_{air}}{RT}.$$

En remplaçant dans l'équation de la statique, nous avons :

$$-\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_{air}}{RT}g.$$

Nous pouvons séparer les variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{RT}dz.$$

L'intégration donne en appelant P_0 la pression au niveau du sol :

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M_{air}g}{RT}z$$

$$P = P_0 e^{-\frac{M_{air}g}{RT}z}.$$

4) L'application numérique donne pour une température de 273 K et une pression au sol de 1,013 bar :

$$P = 1,013 \cdot 10^5 \times e^{-\frac{28,74 \cdot 10^{-3} \times 9,81 \times 10 \cdot 10^3}{8,31 \times 273}}$$
$$P = 29233 \text{ Pa.}$$

La pression diminue fortement. Notre modèle d'atmosphère isotherme devient discutable.

Cette loi permet d'expliquer le manque d'oxygène en montagne.

Comme la pression diminue avec l'altitude, la pression de vapeur saturante diminue aussi et donc l'eau bout à des températures plus faibles. C'est pour cela qu'il faut augmenter le temps de cuisson des aliments.

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir de ne pas mélanger les grandeurs littérales et numériques.

Rapport du jury 2016

Il est par ailleurs très fortement déconseillé de mélanger des grandeurs numériques et littérales lors des calculs.

♥ Il faut se souvenir de la loi de la statique des fluides.

Rapport du jury 2016

La statique des fluides pose problème.

♥ Il faut se souvenir des propriétés du gaz parfait.

♥ Il faut se souvenir de la technique qui permet d'intégrer l'équation différentielle.

Formulaire

- Loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT.$$

- Loi de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}.$$

Énoncé

- 1) Définir ce qu'est un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R_T = 6378 \text{ km}$ et la durée du jour sidéral $j_s = 86164 \text{ s}$.
- 2) Calculer l'énergie à fournir pour faire varier l'altitude du satellite de 50 km. Le satellite reste sur une orbite circulaire.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur le programme de première année. C'est un exercice sur les satellites, donc sur le champ newtonien. Le satellite est géostationnaire donc forcément sur une orbite circulaire.

1) Dans un premier temps, il faut définir ce qu'est un satellite géostationnaire. Ceci va permettre de simplifier le calcul de l'altitude car la trajectoire est circulaire. On se placera dans le système de coordonnées polaires. Attention à la définition de l'altitude qui n'est pas la distance du centre de la Terre au satellite.

↪ Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour une masse ponctuelle placée dans le champ de gravitation terrestre.

2) Il faut ensuite faire une étude énergétique du système entre l'état initial et l'état final défini par le sujet.

↪ Utiliser les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Corrigé

1) Un satellite géostationnaire est un satellite qui possède la même période de révolution que la Terre, c'est-à-dire qu'il est immobile par rapport à la Terre.

On commence par définir le système étudié : le satellite de masse m .

Ensuite, il faut définir le référentiel dans lequel on se place. On utilise le référentiel géocentrique qui a pour origine O , le centre de la Terre, et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Ce référentiel est supposé galiléen.

Le satellite est uniquement soumis à la force centrale d'attraction terrestre c'est-à-dire à la loi de Newton qui est donnée par :

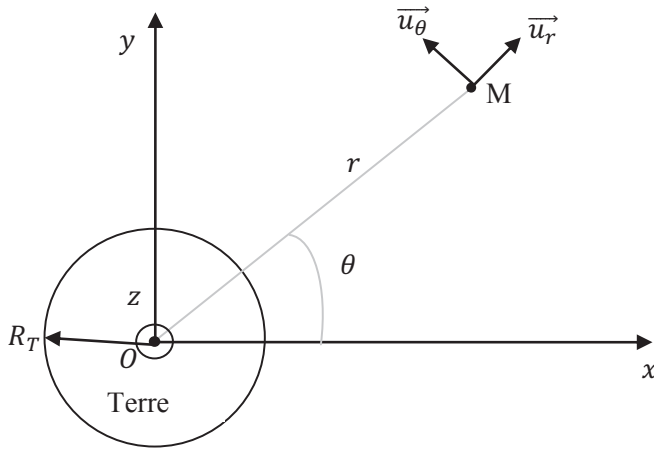
$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

Avec G la constante de gravitation universelle qui vaut :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Le satellite est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r.$$



Pour obtenir la vitesse $\vec{v}$, on dérive $\overline{OM}$ par rapport au temps. Attention le vecteur $\vec{u}_r$ varie lorsque le point M se déplace.

On obtient pour une trajectoire circulaire :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

On détermine ensuite l'accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r.$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on arrive à l'expression suivante :

$$m\vec{a} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

En projetant sur $\vec{u}_\theta$, on obtient :

$$r\ddot{\theta} = 0.$$

Donc on trouve que $\dot{\theta}$ est une constante.

En projetant sur $\vec{u}_r$, on obtient :

$$mr\dot{\theta}^2 = G \frac{mM_T}{r^2}.$$

On peut alors déterminer r :

$$r^3 = G \frac{M_T}{\dot{\theta}^2}.$$

Reste maintenant à déterminer r en fonction des données du sujet. On va exprimer g_0 qui est le champ de pesanteur au niveau du sol en fonction de $\mathcal{G}$ et du rayon de la Terre R_T .

Pour une masse se trouvant au niveau du sol, elle est soumise à la force suivante :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_r.$$

On définit le champ de pesanteur Terrestre par :

$$\vec{F} = -mg_0 \vec{u}_r.$$

Donc, on trouve en identifiant :

$$g_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2}.$$

Pour le satellite géostationnaire, $\dot{\theta}$ est égal à la vitesse de rotation angulaire de la Terre ω , qui a pour expression :

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{j_s}.$$

En remplaçant ces expressions, on détermine le rayon de la trajectoire r :

$$r = \sqrt[3]{\mathcal{G} \frac{M_T}{\dot{\theta}^2}}.$$

D'où :

$$r = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2}{\left(\frac{2\pi}{j_s}\right)^2}}.$$

Et finalement en simplifiant, on a :

$$r = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2 j_s^2}{4\pi^2}}.$$

Pour obtenir l'altitude du satellite, il faut maintenant soustraire le rayon de la Terre. D'où l'expression de l'altitude h :

$$h = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2 j_s^2}{4\pi^2}} - R_T.$$

Reste maintenant à procéder à l'application numérique qui ne pose aucun problème mise à part qu'il faut convertir les km en m.

$$h = \sqrt[3]{9,8 \frac{(6378 \cdot 10^3)^2 86164^2}{4\pi^2}} - 6378 \cdot 10^3.$$

Donc on obtient :

$$h = 35\,788 \text{ km.}$$

La valeur du rayon de l'orbite est :

$$r = 42\,166 \text{ km.}$$

Cette altitude élevée pour les satellites géostationnaires est un inconvénient pour le temps de propagation de l'information. Les satellites doivent aussi émettre avec une plus grande puissance à cause de l'atténuation et c'est aussi plus complexe à envoyer par rapport à un satellite de basse altitude.

2) Sur l'orbite géostationnaire, le satellite a une vitesse $v = r\omega$. Son énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

avec :

$$\omega^2 = G \frac{M_T}{r^3}.$$

On arrive donc à l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mG \frac{M_T}{r}.$$

On va maintenant rechercher l'expression de l'énergie potentielle. On part de l'expression de la force gravitationnelle qui est :

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle car :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p.$$

On a donc en identifiant :

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = G \frac{mM_T}{r^2}.$$

D'où

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r} + \text{constante}.$$

On peut fixer l'énergie potentielle nulle pour un rayon infini, donc :

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r}.$$

Donc finalement l'énergie mécanique du satellite vaut :

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m \mathcal{G} \frac{M_T}{r} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$$

En simplifiant, on trouve :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2} m \mathcal{G} \frac{M_T}{r}.$$

En remplaçant en fonction de g_0 :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r}.$$

Le satellite passe sur une orbite de rayon $r + h$.

Donc l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_{m2} = -\frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r + h}$$

On peut maintenant en déduire la variation d'énergie ΔE :

$$\Delta E = E_{m2} - E_{m1}$$

En remplaçant, on aboutit au résultat suivant :

$$\Delta E = -\frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{(r + h)} + \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r}$$

Donc :

$$\Delta E = \frac{1}{2} m g_0 R_T^2 \left(\frac{h}{r(r + h)} \right).$$

On passe ensuite à l'application numérique de l'énergie par unité de masse :

$$\frac{\Delta E}{m} = \frac{1}{2} 9,8. (6378 \cdot 10^3)^2 \left(\frac{50 \cdot 10^3}{42\,166 \cdot 10^3 (42\,166 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10^3)} \right)$$

$$\frac{\Delta E}{m} = 5,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que le système et le référentiel doivent être bien définis avec rigueur avant d'utiliser le principe fondamental de la dynamique.

Rapport du jury 2016

Les mouvements dans un champ de forces centrales conservatives figurent souvent parmi de lointains souvenirs et ne sont pas maîtrisés.

Rapport du jury 2007

Très généralement, on assiste à un manque de rigueur dans la résolution des exercices de mécanique du point (système non défini, référentiel d'étude mal défini). L'étude des mouvements de satellites, même dans le cas de trajectoires circulaires, est en général mal abordée.

♡ Il faut se souvenir des expressions de l'énergie cinétique et potentielle.

Rapport du jury 2010

En mécanique du point, l'étude des mouvements de satellites est en général mal abordée, faute de connaissances suffisantes sur cette partie du cours.

Formulaire

- Force de gravitation entre deux masses m_1 et m_2 distante de r :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r.$$

- Énergie potentielle dont dérive la force de gravitation :

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \text{constante}.$$

- Expression de l'accélération en coordonnées polaires :

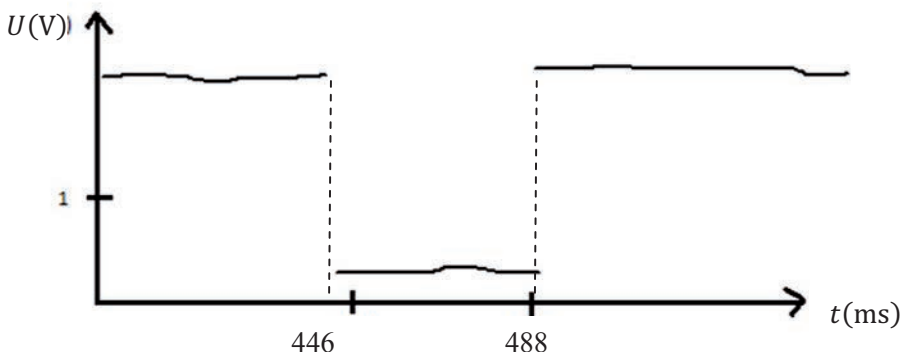
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

Jour n°4

Exercice 4.1

On pose un bloc de $6 \times 6 \times 12 \text{ cm}^3$ sur une planche inclinée formant un angle $\alpha = 60^\circ$ avec l'horizontale.

Une source laser et un récepteur, situés à 60 cm du bloc, donnent le signal suivant :



- 1) On place la face 6×6 devant. Pourquoi ?
- 2) Donner l'équation du mouvement.
- 3) Calculer le coefficient de frottement.
- 4) Compléter le tableau suivant :

$\alpha(^{\circ})$	30	35	40	45	50	55
$\Delta T(\text{ms})$						

- 5) Pourquoi n'a-t-on pas de valeur pour $\alpha = 25^\circ$?

Exercice 4.2

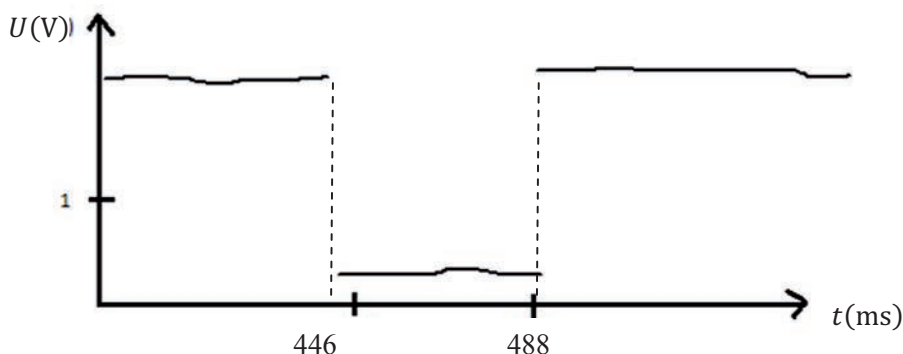
Pour montrer l'existence du vide, on aspire l'air d'une sphère composée de deux hémisphères, puis on fait écarter les deux hémisphères par des chevaux. Estimer le nombre de chevaux nécessaires pour écarter les deux hémisphères.

Données : un cheval pèse environ 600 kg et le rayon de la sphère est de 0,5 m.

Énoncé

On pose un bloc de $6 \times 6 \times 12 \text{ cm}^3$ sur une planche inclinée formant un angle $\alpha = 60^\circ$ avec l'horizontale.

Une source laser et un récepteur, situés à 60 cm du bloc, donnent le signal suivant :



- 1) On place la face 6×6 devant. Pourquoi ?
- 2) Donner l'équation du mouvement.
- 3) Calculer le coefficient de frottement.
- 4) Compléter le tableau suivant :

$\alpha(^{\circ})$	30	35	40	45	50	55
$\Delta T(\text{ms})$						

- 5) Pourquoi n'a-t-on pas de valeur pour $\alpha = 25^\circ$?

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur la mécanique du solide qui est au programme de première année en PCSI et PTSI. L'exercice est faisable en deuxième année pour les MP.

- 1) Cette question n'est pas calculatoire et demande juste de la réflexion.
 - ↪ Aucune difficulté et non bloquante.
- 2) Pour trouver l'équation du mouvement, il faut définir le système, faire le bilan des forces et appliquer la deuxième loi de Newton.
 - ↪ Penser à faire un schéma des forces afin d'éviter les erreurs de projection.
- 3) Il s'agit d'exploiter un résultat expérimental.
 - ↪ Bien faire le lien entre l'étude théorique et la courbe expérimentale.

4) Cette question utilise l'étude théorique de la question 3).

↪ Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel la diode est cachée par le cube.

5) Si l'angle est faible, il n'y a pas de mesure car l'expérience n'est pas possible.

↪ Déterminer l'angle minimal pour lequel le bloc peut glisser.

Corrigé

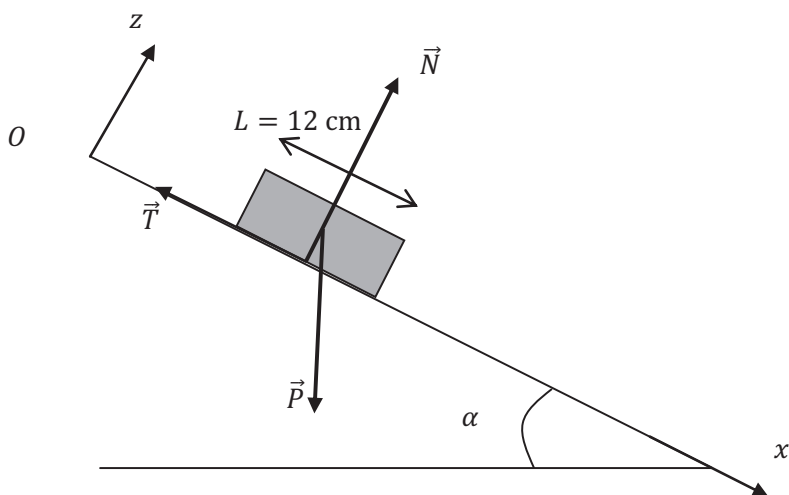
1) Le bloc est posé sur la face la plus importante afin d'éviter un éventuel basculement.

2) Le système est constitué du bloc.

Le référentiel d'étude est galiléen. Les forces exercées sur le bloc sont le poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$ qui peut se décomposer en une composante normale au support $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$.

La force de contact vérifie les lois de Coulomb.

Nous commençons par faire un schéma du système afin de visualiser correctement les forces.



La deuxième loi de Newton donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}.$$

Nous prenons un axe Ox qui fait un angle α avec l'horizontale.

Nous pouvons donc projeter la loi vectorielle sur cet axe :

$$m\ddot{x} = -T + mg \sin \alpha.$$

La projection sur l'axe Oz donne :

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

Nous obtenons donc la réaction normale :

$$N = mg \cos \alpha.$$

Comme le cube glisse sur le plan incliné, nous avons d'après la loi de Coulomb :

$$T = fN.$$

L'accélération est donc égale à :

$$m\ddot{x} = -fN + mg \sin \alpha$$

$$m\ddot{x} = -fmg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

$$\ddot{x} = -fg \cos \alpha + g \sin \alpha.$$

Pour que le cube glisse, il faut :

$$-fg \cos \alpha + g \sin \alpha > 0$$

$$f < \tan \alpha.$$

Ici nous avons :

$$\tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1,73.$$

En intégrant l'expression de l'accélération, nous obtenons en utilisant le fait que la vitesse initiale est nulle :

$$\dot{x} = (-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)t.$$

Nous intégrons une seconde fois sachant que le bas du cube coïncide avec l'origine :

$$x(t) = \frac{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}{2} t^2.$$

3) Pour calculer le coefficient de frottement, il est nécessaire d'utiliser les résultats expérimentaux.

Lorsque le cube commence à cacher le détecteur, il a parcouru la distance $d = 60$ cm et nous sommes au temps noté $t_1 = 446$ ms. Nous obtenons :

$$x(t_1) = d = \frac{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}{2} t_1^2.$$

Lorsque le cube termine de cacher le détecteur, il a parcouru la distance $d + L$ et le temps est noté $t_2 = 448$ ms. Nous obtenons :

$$x(t_2) = d + L = \frac{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}{2} t_2^2.$$

Nous obtenons deux expressions du coefficient de frottement qui sont :

$$f_1 = \tan \alpha - \frac{2d}{g \cos \alpha t_1^2}$$

$$f_2 = \tan \alpha - \frac{2(d+L)}{g \cos \alpha t_2^2}.$$

L'application numérique donne :

$$f_1 = \tan 60^\circ - \frac{2 \times 0,6}{9,81 \times \cos(60^\circ) \times (446.10^{-3})^2} = 0,502$$

$$f_2 = \tan 60^\circ - \frac{2 \times (0,6 + 0,12)}{9,81 \times \cos(60^\circ) \times (488.10^{-3})^2} = 0,499.$$

Nous pouvons donc en conclure que :

$$f = 0,5.$$

On a bien la condition d'un coefficient de frottement inférieur à 1,73.

4) Nous allons déterminer les valeurs théoriques pour différents angles. Pour cela nous utilisons les résultats précédents. Le temps t_1 pour lequel le capteur commence à être caché correspond à une distance parcourue égale à d et vaut :

$$x(t_1) = d = \frac{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}{2} t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}}.$$

L'instant t_2 correspond au temps où le capteur finit d'être caché et le cube a parcouru la distance $L + d$ soit :

$$x(t_2) = d + L = \frac{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}{2} t_2^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(d+L)}{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}}.$$

Nous pouvons donc en déduire l'intervalle de temps :

$$\Delta T = t_2 - t_1$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2(d+L)}{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}} - \sqrt{\frac{2d}{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}}$$

$$\Delta T = \frac{\sqrt{2(d+L)} - \sqrt{2d}}{\sqrt{(-fg \cos \alpha + g \sin \alpha)}}.$$

Les applications numériques donnent :

$$\Delta T(30^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(30^\circ) + 9,81 \sin(30^\circ))}}$$

$$\Delta T(30^\circ) = 0,129 \text{ s} = 129 \text{ ms}$$

$$\Delta T(35^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(35^\circ) + 9,81 \sin(35^\circ))}}$$

$$\Delta T(30^\circ) = 0,082 \text{ s} = 82 \text{ ms}$$

$$\Delta T(40^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(40^\circ) + 9,81 \sin(40^\circ))}}$$

$$\Delta T(40^\circ) = 0,065 \text{ s} = 65 \text{ ms}$$

$$\Delta T(45^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(45^\circ) + 9,81 \sin(45^\circ))}}$$

$$\Delta T(45^\circ) = 0,056 \text{ s} = 56 \text{ ms}$$

$$\Delta T(50^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(50^\circ) + 9,81 \sin(50^\circ))}}$$

$$\Delta T(50^\circ) = 0,050 \text{ s} = 50 \text{ ms}$$

$$\Delta T(55^\circ) = \frac{\sqrt{2(0,6 + 0,12)} - \sqrt{2 \times 0,6}}{\sqrt{(-0,5 \times 9,81 \cos(55^\circ) + 9,81 \sin(55^\circ))}}$$

$$\Delta T(50^\circ) = 0,046 \text{ s} = 46 \text{ ms.}$$

Nous obtenons le tableau suivant :

$\alpha(^{\circ})$	30	35	40	45	50	55
$\Delta T(\text{ms})$	129	82	65	56	50	46

5) Il faut donc que :

$$-f g \cos \alpha + g \sin \alpha > 0$$

$$\tan \alpha > f.$$

L'application numérique donne :

$$\tan \alpha > 0,5$$

$$\alpha > \arctan(0,5) = 26,56^\circ.$$

Pour un angle de 25° , le bloc reste immobile. L'expérience est donc impossible.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'analyser le système avant de se lancer dans les calculs.

Rapport du jury 2016

Un exercice de mécanique doit débiter, autant que possible, par une discussion physique qui, en plus de présenter les phénomènes en jeu, permettra de dégager la meilleure stratégie de résolution. Trop de candidats, faisant fi de cette étape, se plongent directement dans un ensemble décousu d'équations dont ils ne savent que faire une fois qu'elles ont été écrites.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement les lois de Coulomb.

Rapport du jury 2016

Le jury a aussi noté une amélioration sur les sujets traitant des coefficients de frottement. Tous les éléments ne sont pas toujours acquis mais les candidats de la session 2016 semblent mieux maîtriser la physique associée à ce thème.

♡ Il faut se souvenir de l'application de la deuxième loi de Newton.

♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les vecteurs.

Rapport du jury 2016

La mécanique du point est plutôt bien traitée, en dépit d'erreurs de projection plus fréquentes.

Formulaire

- Lois de Coulomb pour le contact entre deux solides :

L'action de contact $\vec{R}$ du support sur le solide possède une composante normale $\vec{N}$ dirigée du support vers le système et une composante tangentielle $\vec{T}$.

Ces deux composantes sont reliées par un coefficient de frottement f qui est sans dimension.

Dans le cas de l'équilibre du solide, les modules des composantes de l'action de contact vérifient l'inégalité qui traduit la condition de frottement statique soit :

$$\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|.$$

Dans le cas du frottement cinétique avec glissement à la vitesse de glissement $\vec{v}_g$, on a l'égalité suivante :

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|.$$

Dans le cas où il n'y a pas de frottements, on a $\|\vec{T}\| = 0$.

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

Énoncé

Pour montrer l'existence du vide, on aspire l'air d'une sphère composée de deux hémisphères, puis on fait écarter les deux hémisphères par des chevaux. Estimer le nombre de chevaux nécessaires pour écarter les deux hémisphères.

Données : un cheval pèse environ 600 kg et le rayon de la sphère est de 0,5 m.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur le calcul de la force de pression. Il s'agit d'une résolution de problème avec peu d'indications.

Il faut donc dans un premier temps déterminer la force exercée sur une sphère lorsque la pression est nulle à l'intérieur.

↪ Penser à faire un schéma et à utiliser la définition de la force surfacique de pression.

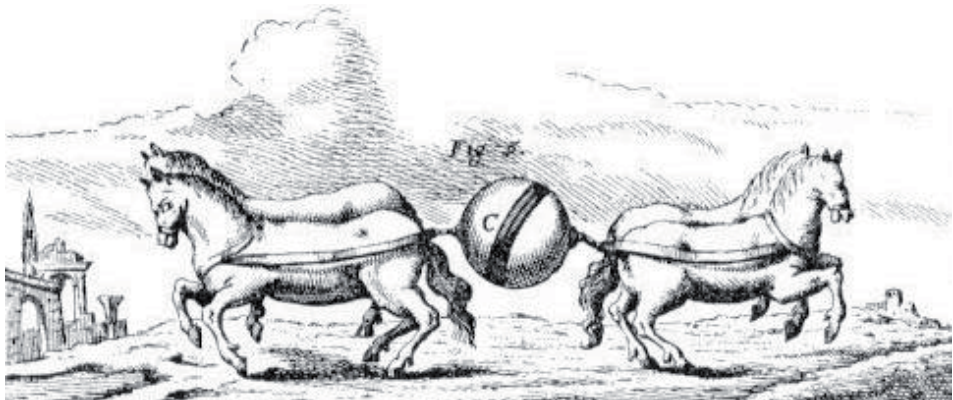
↪ Projeter la force de pression sur l'axe horizontal.

Il faudra ensuite convertir cette force en Newton en poids afin d'avoir le nombre de chevaux.

↪ Pas de difficulté.

Corrigé

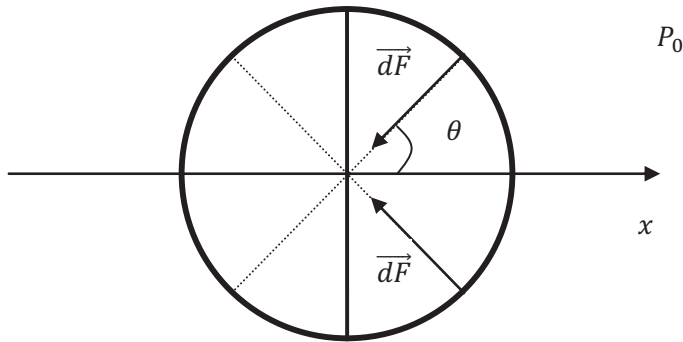
Nous commençons par donner une illustration de l'expérience qui a été réalisée à Magdebourg en 1656 :



Nous pouvons déjà donner une interprétation de cette expérience. Comme il y a du vide à l'intérieur des deux hémisphères, la pression atmosphérique exerce une pression sur les deux hémisphères et il est très difficile de les décoller.

Il faut donc dans un premier temps déterminer la force de pression exercée sur un hémisphère.

Commençons par faire un schéma :



La force élémentaire de pression a pour expression :

$$\vec{dF} = -P\vec{d^2S}$$

avec $\vec{d^2S}$ la normale sortante.

La pression extérieure est égale à la pression atmosphérique P_0 .

La surface élémentaire vaut :

$$\vec{d^2S} = R d\theta R \sin \theta d\varphi \vec{e}_r.$$

Nous avons donc :

$$\vec{dF} = -P_0 \vec{d^2S}.$$

En sommant toutes les forces élémentaires de pression nous trouvons que la résultante est sur l'axe Ox .

Nous pouvons donc projeter cette force élémentaire sur l'axe Ox et nous obtenons :

$$dF_x = -P_0 R d\theta R \sin \theta d\varphi \cos \theta.$$

La résultante exercée sur la demi-sphère est donc égale à :

$$F_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} -P_0 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$F_x = -2\pi P_0 R^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_x = -2\pi P_0 R^2 \frac{1}{2}$$

$$F_x = \pi R^2 P_0.$$

Cette force de pression est donc égale à la surface de la sphère projetée sur la perpendiculaire à l'axe multipliée par la pression. C'est bien le résultat que l'on attendait.

Nous pouvons travailler sur la surface élémentaire déjà intégrée une fois soit :

$$\overrightarrow{dS} = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \vec{e}_r.$$

Cette surface correspond à la couronne de rayon $R \sin \theta$ et d'épaisseur $R d\theta$. Tous ces points donnent la même contribution à la force de pression. Dans ce cas la résultante vaut :

$$F_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} -P_0 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Nous retrouvons bien le même résultat.

Pour trouver le nombre de chevaux nécessaires, nous allons supposer qu'un cheval peut exercer une force égale à son poids soit :

$$F_{cheval} = mg.$$

Sachant qu'il y a deux hémisphères, il faudra N chevaux de chaque côté soit :

$$2N = \frac{2F_x}{mg} = \frac{2\pi R^2 P_0}{mg}.$$

L'application numérique donne :

$$2N = \frac{2\pi \times (0,5)^2 10^5}{600 \times 9,81} = 26,7.$$

Ce n'est pas avec 4 chevaux, comme l'illustre le schéma, que les sphères vont se décoller. Il faut donc au minimum 14 chevaux de chaque côté.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'analyser le sujet avant de se lancer dans des calculs complexes.

Rapport du jury 2016

Un exercice de mécanique doit débiter, autant que possible, par une discussion physique qui, en plus de présenter les phénomènes en jeu, permettra de dégager la meilleure stratégie de résolution. Trop de candidats, faisant fi de cette étape, se plongent directement dans un ensemble décousu d'équations dont ils ne savent que faire une fois qu'elles ont été écrites.

♡ Il faut se souvenir de projeter correctement un vecteur sur un axe.

♡ Il faut se souvenir de contrôler ses résultats à la fin de l'exercice.

Rapport du jury 2016

Enfin, les exercices de mécanique étant très concrets, il faut faire des tests de pertinence une fois le résultat obtenu.

Formulaire

- Force élémentaire de pression :

$$\overrightarrow{d^2F} = -P \overrightarrow{d^2S}$$

- Surface élémentaire sur une sphère de rayon R :

$$\overrightarrow{d^2S} = R d\theta R \sin \theta d\varphi \vec{e}_r.$$

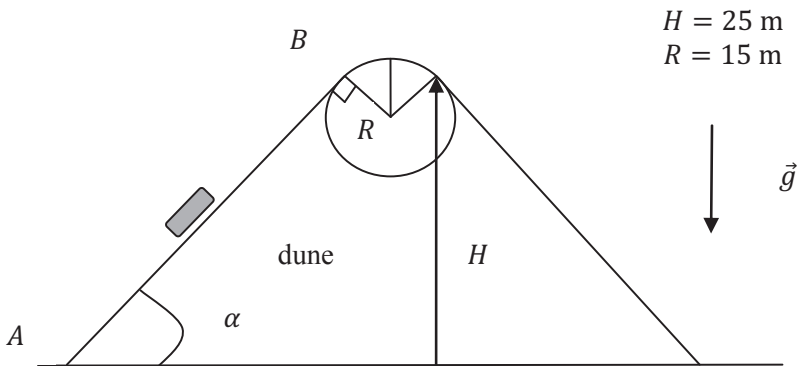
- Force de pression :

$$\vec{F} = - \iint P \overrightarrow{d^2S}.$$

Jour n°5

Exercice 5.1

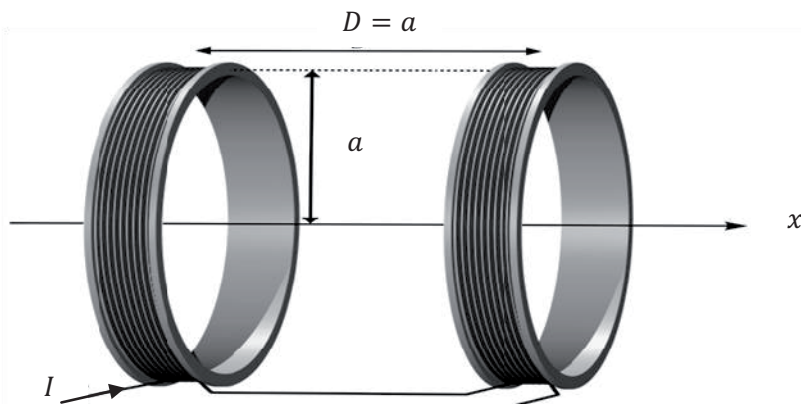
Un buggy gravit la dune avec une vitesse constante de $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Il exécute ce parcours AB en 3 s.



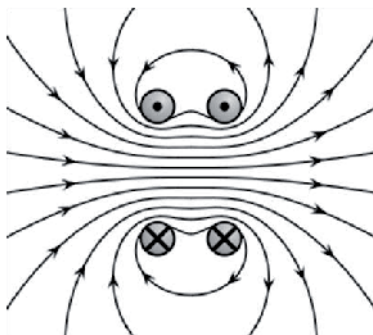
- 1) Le buggy ne doit pas perdre contact avec le sol. Est-ce le cas ?
- 2) Quelle doit-être la vitesse maximale pour que le buggy ne décolle pas ?

Exercice 5.2

Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines de 50 spires chacune et de rayon $a = 10 \text{ cm}$. Elles sont distantes de D et parcourues par un courant I .

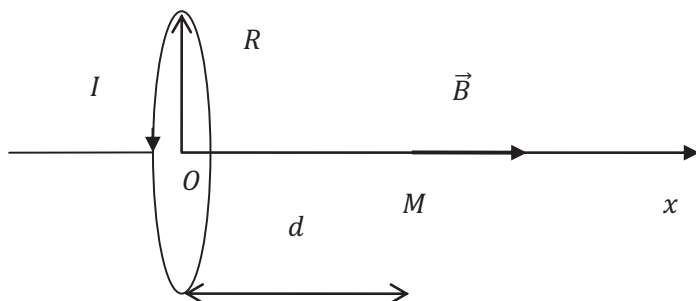


1) À l'aide de la carte des lignes de champ, déterminer les caractéristiques du champ magnétique produit.



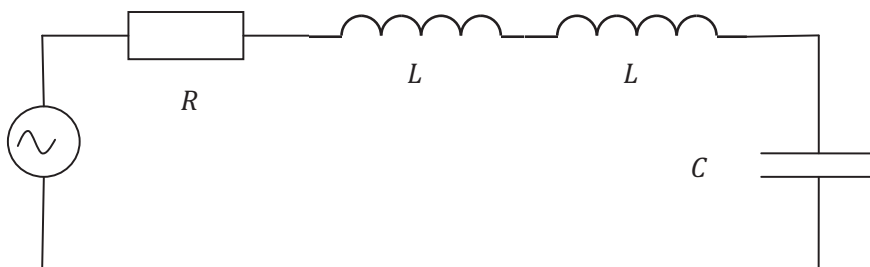
Le champ magnétique produit sur l'axe Ox de la spire de rayon R à la distance d du centre vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x.$$



2) Déterminer le courant I circulant dans les bobines de Helmholtz qui donne un champ magnétique au centre du dispositif qui a la même norme que le champ magnétique terrestre.

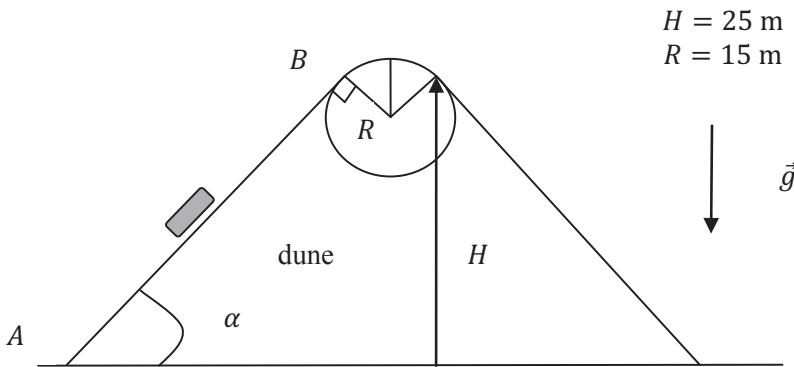
Les bobines sont insérées dans le circuit électrique suivant :



3) Déterminer la valeur de la capacité C qui permet d'optimiser le courant I .

Énoncé

Un buggy gravit la dune avec une vitesse constante de 36 km.h^{-1} . Il exécute ce parcours AB en 3 s.



- 1) Le buggy ne doit pas perdre contact avec le sol. Est-ce le cas ?
- 2) Quelle doit-être la vitesse maximale pour que le buggy ne décolle pas ?

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un sujet portant sur la mécanique du point.

- 1) Pour que le buggy reste en contact avec le sol, il faut que la réaction reste positive. Il s'agit donc de déterminer la réaction du sol sur le buggy dans la phase du mouvement circulaire.

↪ Appliquer la seconde loi de Newton dans la partie où le buggy a un mouvement circulaire uniforme et s'assurer que la réaction normale reste positive pour tous les angles.

- 2) C'est encore une application de la question précédente.

↪ Il faut déterminer la vitesse maximale pour que le buggy ne décolle pas.

Corrigé

- 1) Nous commençons par étudier le mouvement du buggy dans la partie circulaire en supposant que le module de la vitesse reste constant. Nous supposons que le buggy est une masse ponctuelle.

Le buggy est repéré sur la partie circulaire par ses coordonnées polaires (R, θ) .

La vitesse du buggy est donnée, en coordonnées polaire par :

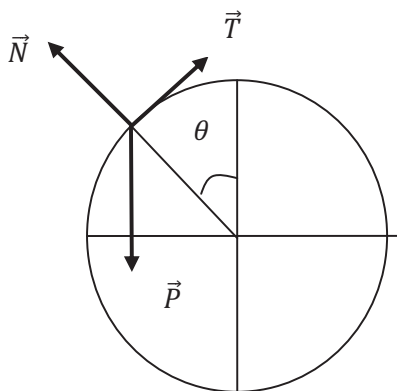
$$\vec{v} = V_0 \vec{e}_\theta = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

L'accélération est pour un mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{a} = -V_0 \dot{\theta} \vec{e}_r = -\frac{V_0^2}{R} \vec{e}_r.$$

Les forces exercées sur le buggy sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{N}$ la composante normale et $\vec{T}$ la composante tangentielle.

Nous pouvons faire un schéma de la portion circulaire pour placer les différentes forces :



La seconde loi de Newton donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}.$$

En projetant sur la normale, nous trouvons :

$$-m \frac{V_0^2}{R} = N - mg \cos \theta$$

Pour que le buggy reste en contact avec la piste, il faut que :

$$N > 0.$$

Nous obtenons donc l'expression de la réaction normale en fonction de la position du buggy :

$$N = mg \cos \theta - m \frac{V_0^2}{R}$$

Il faut donc :

$$mg \cos \theta - m \frac{V_0^2}{R} > 0.$$

La condition sur l'angle est donc :

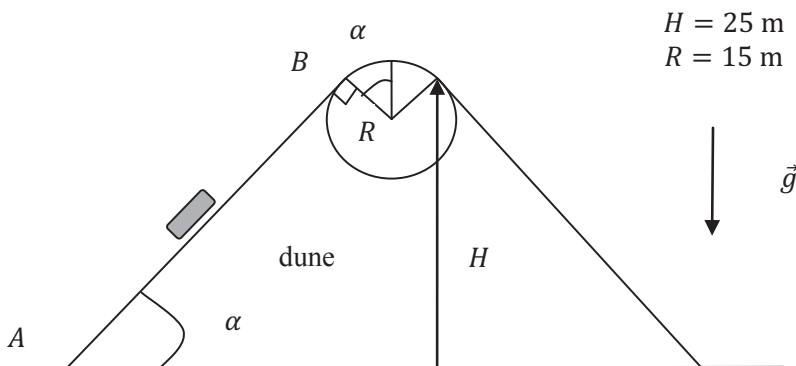
$$\cos \theta > \frac{V_0^2}{gR}.$$

L'application numérique donne :

$$\cos \theta > \frac{\left(\frac{36 \times 1000}{3600}\right)^2}{9,81 \times 15} = 0,68.$$

Il faut donc maintenant déterminer la plage de variation de cet angle θ .

Lorsque le buggy arrive sur la partie circulaire au point B , l'angle θ_B vaut α en utilisant le schéma :



L'angle θ varie donc de α lorsque le buggy est au point B à 0 lorsqu'il se trouve au sommet.

La valeur minimale du cosinus est donc pour l'angle α .

Nous obtenons donc en utilisant le schéma précédent :

$$\sin \alpha = \frac{H}{AB}.$$

Il faut maintenant déterminer la distance AB . Pour cela, il est utile d'utiliser l'énoncé qui dit que le buggy atteint le point B au bout d'un temps $\tau = 3 \text{ s}$. Nous avons donc la relation suivante :

$$AB = V_0 \tau.$$

Donc le cosinus minimal est le suivant :

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{H}{V_0 \tau}\right)^2}.$$

L'application numérique donne :

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{25}{\left(\frac{36 \times 1000}{3600} \right) \times 3} \right)^2} = 0,55.$$

Le cosinus de l'angle initial est inférieur à la condition trouvée donc le buggy décolle lorsqu'il arrive au point B.

2) Pour que le buggy ne décolle pas, il faut que la relation suivante soit vérifiée :

$$\cos \alpha > \frac{V_0^2}{gR}.$$

Nous obtenons donc une condition sur la vitesse qui est la suivante :

$$V_0 < \sqrt{gR \cos \alpha}.$$

L'application numérique donne :

$$V_{0min} = \sqrt{9,81 \times 15 \times 0,55} = 9 \text{ m.s}^{-1} = 32,4 \text{ km.h}^{-1}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'expression de la vitesse et de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme.

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de vérifier l'homogénéité des résultats.

Rapport du jury 2016

Toujours vérifier ses résultats en utilisant l'analyse dimensionnelle ; cela n'est que trop peu fréquent chez les candidats !

♡ Il faut se souvenir de bien définir le système et de bien faire le bilan des forces extérieures sans en oublier.

Rapport du jury 2016

En mécanique : toujours définir le système et le référentiel. Il FAUT également représenter toutes les forces extérieures appliquées au système.

♡ Il faut se souvenir qu'il est important d'analyser et d'utiliser les graphes donnés.

Conseils du jury 2016

Extraire depuis les documents associés à l'énoncé (photos, courbes) des informations pertinentes, notamment les valeurs numériques parfois indispensables à la résolution.

♡ Il faut se souvenir de bien projeter les vecteurs lors de l'application de la deuxième loi de Newton.

Formulaire

- Vitesse pour un mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

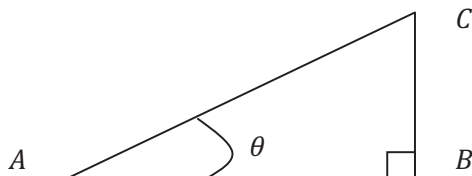
- Accélération pour un mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{a} = -V_0\dot{\theta}\vec{e}_r = -\frac{V_0^2}{R}\vec{e}_r$$

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

- Relations trigonométriques :



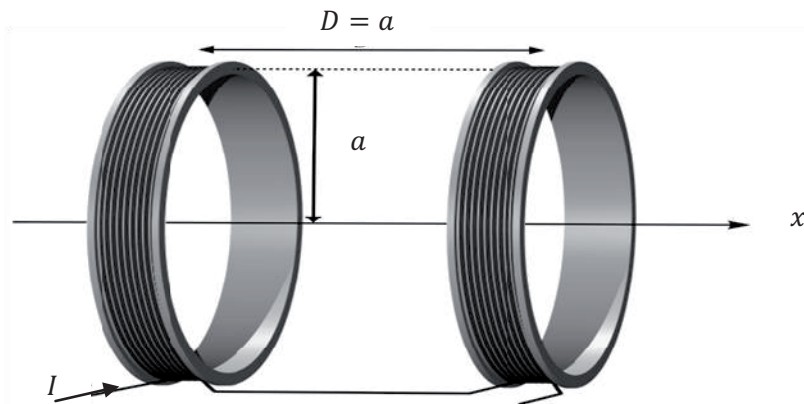
$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AC}$$

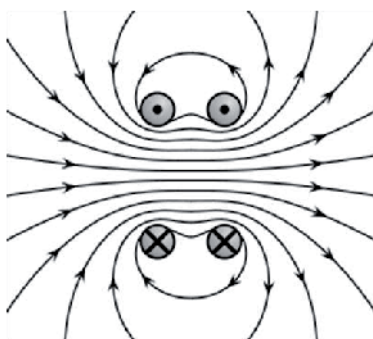
$$\tan \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}.$$

Énoncé

Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines de 50 spires chacune et de rayon $a = 10$ cm. Elles sont distantes de D et parcourues par un courant I .

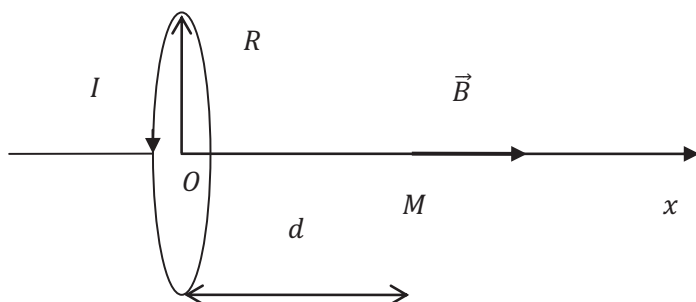


1) À l'aide de la carte des lignes de champ, déterminer les caractéristiques du champ magnétique produit.



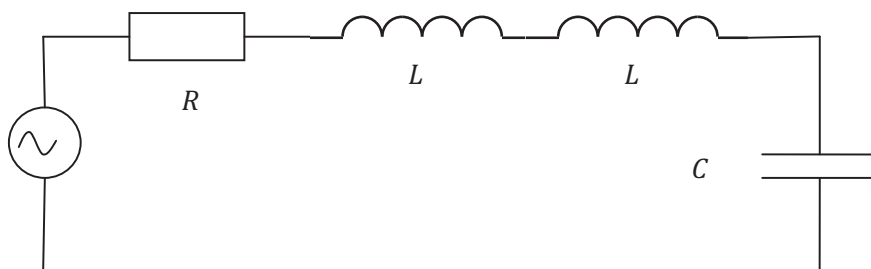
Le champ magnétique produit sur l'axe Ox de la spire de rayon R à la distance d du centre vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x.$$



2) Déterminer le courant I circulant dans les bobines de Helmholtz qui donne un champ magnétique au centre du dispositif qui a la même norme que le champ magnétique terrestre.

Les bobines sont insérées dans le circuit électrique suivant :



3) Déterminer la valeur de la capacité C qui permet d'optimiser le courant I .

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un sujet portant la magnétostatique, l'électrocinétique et l'induction.

1) Dans cette première question, il s'agit de lire une carte de ligne de champ.

↪ Utiliser les propriétés du champ magnétique. Cette question est relativement simple.

2) Il faut dans un premier temps déterminer le champ magnétique au centre des bobines en utilisant la formule donnée et le comparer au champ magnétique terrestre.

↪ Penser à sommer les champs créés par chaque bobine.

3) Nous avons maintenant affaire à un circuit RLC . Il faut penser à déterminer l'inductance équivalente aux deux bobines en tenant compte de l'inductance mutuelle.

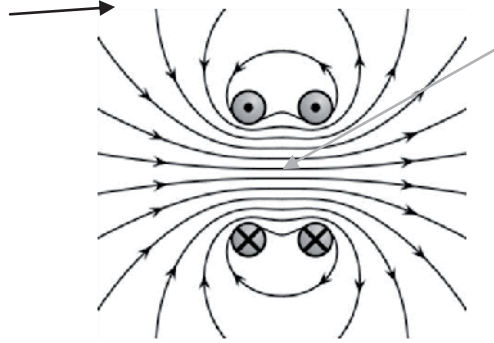
↪ Optimiser le courant revient à obtenir le courant maximal dans le circuit pour une tension donnée. Penser à écrire la condition de résonance.

Corrigé

1) L'observation des lignes de champ permet de dire que le champ est quasi-uniforme à l'intérieur des bobines car les lignes de champs sont parallèles et équidistantes.

Le champ magnétique est bien plus faible à l'extérieur car les lignes de champ sont plus écartées.

Zone de
champ
moins
intense



Zone de
champ quasi
uniforme et
intense

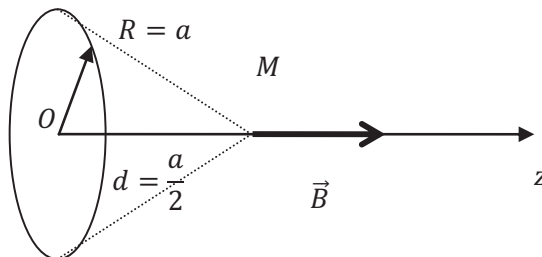
2) La formule donnée permet de calculer le champ sur l'axe d'une spire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x.$$

I représente le courant circulant dans la spire. Ici, il faut le remplacer par NI où N représente le nombre de spires.

d est la distance de la spire au point où le champ magnétique est calculé donc ici il faut remplacer d par $\frac{D}{2} = \frac{a}{2}$.

Le rayon de la spire R est à remplacer par a , le rayon des bobines.



Les champs créés par chaque bobine sont de même sens et de même norme. Il faut donc les additionner. Nous avons donc au centre des bobines un champ qui vaut :

$$\vec{B} = 2 \frac{\mu_o N I}{2a} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{D}{2a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o N I}{a} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x.$$

Nous pouvons donc en déduire le courant qui doit circuler dans les bobines :

$$I = \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Ba}{\mu_o N}.$$

Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}$ T.

L'application numérique donne :

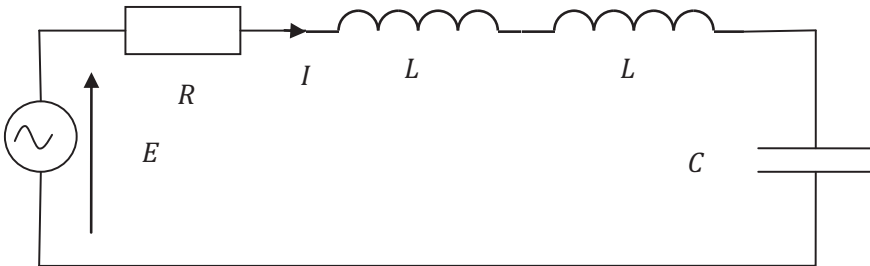
$$I = \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{5 \cdot 10^{-5} \times 0,1}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 50}$$

$$\boxed{I = 8,7 \cdot 10^{-2} \text{ A} = 87 \text{ mA.}}$$

3) Pour optimiser le courant, il faut se placer à la résonance du circuit.

Les deux bobines sont placées en série. Il faut tenir compte de l'inductance mutuelle M . L'inductance équivalente est donc :

$$L_{eq} = 2L + 2M.$$



La tension est donc donnée par la loi des mailles :

$$E = \left(R + 2j(L + M)\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{I}.$$

Le courant est donc égal en complexes à :

$$\underline{I} = \frac{E}{R + 2j(L + M)\omega + \frac{1}{jC\omega}}.$$

Le module du courant vaut donc :

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(2(L + M)\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Le courant est maximum pour :

$$\left(2(L + M)\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0.$$

Nous trouvons donc :

$$C = \frac{1}{2(L + M)\omega^2}.$$

Cette valeur dépend de la fréquence du générateur.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre afin de vérifier ses résultats numériques.

Conseils du jury 2016

S'assurer que les résultats sont cohérents (pertinence, ordre de grandeur, ...).

♡ Il faut se souvenir d'adapter les formules données au système étudié.

♡ Il faut se souvenir d'appliquer correctement la loi des mailles et de trouver la condition de résonance en intensité dans un circuit *RLC* série.

Rapport du jury 2016

Les difficultés majeures se concentrent sur les règles de base des circuits, que ce soit la loi des mailles ou la loi des nœuds, même pour des circuits très simples.

Formulaire

- Champ magnétique terrestre :

$$B \approx 5.10^{-5} \text{ T.}$$

- Composante horizontale du champ magnétique terrestre :

$$B_h \approx 2.10^{-5} \text{ T.}$$

- Bobines de Helmholtz : c'est un système de deux bobines parcourues par un même courant circulant dans le même sens. Les deux bobines sont séparées d'une distance égale au rayon de la bobine soit $D = a$.
- Propriétés du champ magnétique : le champ magnétique est à flux conservatif c'est-à-dire que plus les lignes de champ se rapprochent plus le champ magnétique est intense.
- Impédances complexes :

$$Z_R = R$$

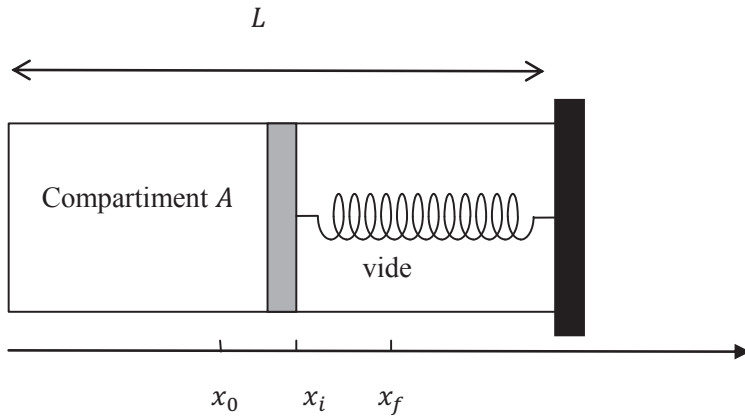
$$Z_L = jL\omega$$

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Jour n°6

Exercice 6.1

On considère un piston de masse négligeable, d'épaisseur négligeable et de section S . Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 .



Lorsque le compartiment A est vide, le ressort se trouve en $x = x_0$.

Deux moles de gaz parfait sont introduites dans le compartiment A . Le piston se déplace en x_i .

Le gaz est chauffé et le piston se déplace en x_f .

La transformation est supposée réversible mécaniquement.

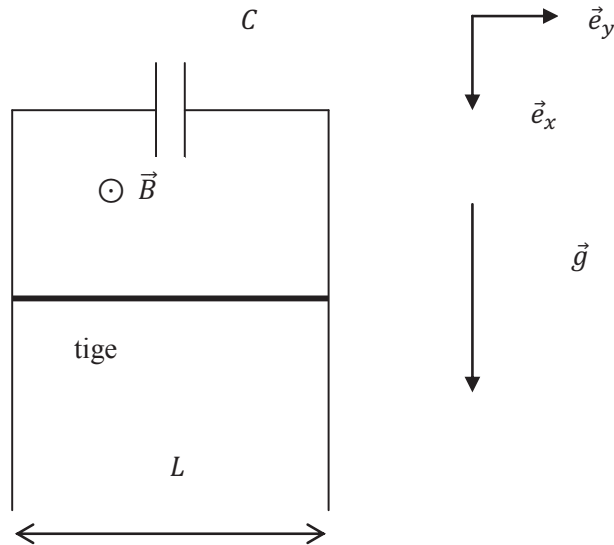
- 1) Calculer P_i , P_f , T_i et T_f en fonction de k , S et des différentes positions du piston.
- 2) Calculer W_p le travail des forces de pression lors du chauffage.
- 3) Déterminer la variation d'énergie interne du gaz lors du chauffage et en déduire le transfert thermique Q reçu par le gaz.

Exercice 6.2

On considère une tige métallique de masse m , de longueur L qui peut se déplacer verticalement sur deux rails distants de L .

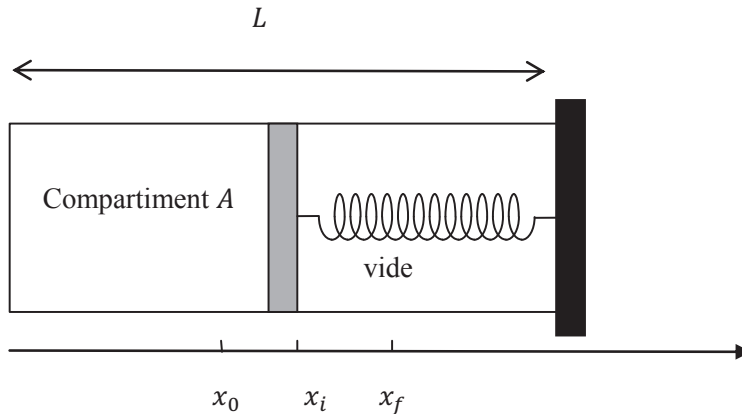
À l'instant $t = 0$, on lâche la tige.

- 1) En utilisant la loi de Lenz, justifier le sens du courant.
- 2) Déterminer la fem et l'intensité en fonction de B , C , L et de la vitesse de la tige notée v .
- 3) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ de la tige.



Énoncé

On considère un piston de masse négligeable, d'épaisseur négligeable et de section S . Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 .



Lorsque le compartiment A est vide, le ressort se trouve en $x = x_0$.

Deux moles de gaz parfait sont introduites dans le compartiment A . Le piston se déplace en x_i .

Le gaz est chauffé et le piston se déplace en x_f .

La transformation est supposée réversible mécaniquement.

- 1) Calculer P_i , P_f , T_i et T_f en fonction de k , S et des différentes positions du piston.
- 2) Calculer W_p le travail des forces de pression lors du chauffage.
- 3) Déterminer la variation d'énergie interne du gaz lors du chauffage et en déduire le transfert thermique Q reçu par le gaz.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de thermodynamique utilisant un ressort.

- 1) Il s'agit dans cette première question de déterminer les états initial et final du système.

↪ Écrire la condition d'équilibre du piston dans les différents cas.

- 2) Il faut déterminer le travail de la force de pression.

↪ Utiliser la définition donnée dans le cours. Si problème, aller revoir le cours.

3) Il s'agit maintenant de faire un bilan thermique.

↪ Utiliser le premier principe de la thermodynamique appliqué au système qui sera défini avec soin.

Corrigé

1) Lorsqu'il y a du vide de chaque côté, le piston se trouve dans sa position d'équilibre. Il n'est soumis à aucune force. Les forces de pression sont nulles et la force de rappel du ressort doit aussi être nulle. Le ressort est donc dans sa position d'équilibre et a donc sa longueur à vide soit :

$$l = l_0.$$

En utilisant la dimension du système :

$$L = x_0 + l_0$$

$$\boxed{x_0 = L - l_0.}$$

Nous introduisons les deux moles de gaz dans le compartiment A. Nous avons donc une force de pression exercée sur le piston. Pour maintenir l'équilibre, le ressort doit donc se déformer.

La force de pression exercée sur le piston est :

$$\vec{F}_P = P_i S \vec{e}_x.$$

La force de rappel du ressort vaut :

$$\vec{F} = \varepsilon k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})\vec{e}_x.$$

Lorsque le ressort possède une longueur supérieure à sa longueur à vide, la force tend à le rétrécir. La force est donc dirigée dans le sens de $\vec{e}_x$. Il faut donc prendre $\varepsilon = 1$.

$$\vec{F} = k(L - x_i - l_0)\vec{e}_x.$$

Comme le piston est en équilibre, nous avons :

$$\vec{F}_P + \vec{F} = 0$$

$$P_i S \vec{e}_x + k(L - x_i - l_0)\vec{e}_x = 0$$

$$P_i S + k(x_0 - x_i) = 0$$

$$\boxed{P_i = \frac{k}{S}(x_0 - x_i).}$$

Dans l'état final, la pression est P_f et la position du ressort devient x_f .

Il suffit de reprendre la position d'équilibre du ressort en changeant les notations soit :

$$\boxed{P_f = \frac{k}{S}(x_0 - x_f).}$$

Pour obtenir les températures, il faut utiliser la loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT$$

$$T = \frac{PV}{nR}.$$

Les volumes sont donnés par :

$$V_i = Sx_i$$

$$V_f = Sx_f.$$

Les températures sont donc :

$$T_i = \frac{k}{S}(x_0 - x_i) \frac{Sx_i}{nR}$$

$$\boxed{T_i = (x_0 - x_i) \frac{kx_i}{nR}}$$

$$T_f = \frac{k}{S}(x_0 - x_f) \frac{Sx_f}{nR}$$

$$\boxed{T_f = (x_0 - x_f) \frac{kx_f}{nR}.$$

2) Nous choisissons comme système, le gaz et le piston. Comme la pression extérieure est nulle, nous obtenons :

$$W = -P_{ext} \int dV$$

$$\boxed{W = 0.}$$

3) La variation d'énergie interne du système constitué par le gaz et le piston est donc :

$$\Delta U = nc_V(T_f - T_i).$$

La capacité thermique du gaz parfait est égale à :

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Nous avons donc :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{k}{nR} ((x_0 - x_f)x_f - (x_0 - x_i)x_i)$$

$$\Delta U = \frac{k}{\gamma - 1} ((x_0 - x_f)x_f - (x_0 - x_i)x_i).$$

La variation d'énergie cinétique du système est nulle car le système est immobile.

La force de rappel d'un ressort dérive d'une énergie potentielle qui vaut :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k (\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})^2.$$

Le travail reçu par le système est égal au travail de la force de rappel du ressort et donc égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle élastique :

$$W_{\text{él}} = -\Delta\mathcal{E}_p = -\frac{k}{2}\left((x_0 - x_f)^2 - (x_0 - x_i)^2\right).$$

Le premier principe appliqué au système gaz et piston donne :

$$\Delta U = W_p + W_{\text{él}} + Q.$$

Nous pouvons donc obtenir le transfert thermique :

$$Q = \Delta U + \Delta\mathcal{E}_p$$

$$Q = \frac{k}{\gamma - 1}\left((x_0 - x_f)x_f - (x_0 - x_i)x_i\right) + \frac{k}{2}\left((x_0 - x_f)^2 - (x_0 - x_i)^2\right).$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'en thermodynamique il est très important de définir le système, de bien lire l'énoncé et de déterminer les états initial et final.

Rapport du jury 2016

En thermodynamique, si les candidats pensent désormais à bien préciser le système sur lequel ils appliquent le premier ou le second principe, il faut encore insister sur un point : la lecture de l'énoncé ! Une analyse préalable du texte en relevant les termes essentiels (adiabatique, calorifugé, diathermane...), en s'interrogeant sur l'état initial et l'état final, sur les grandeurs demandées les conduirait certainement à plus de discernement.

♡ Il faut se souvenir de la force de rappel du ressort et de son énergie potentielle.

Rapport du jury 2016

L'introduction d'un ressort surtout s'il est vertical, pose toujours des difficultés : rappelons que trois schémas avec la situation à vide puis à l'équilibre puis en mouvement permettent d'avoir une approche plus claire du rôle du ressort.

♡ Il faut se souvenir d'appliquer correctement le premier principe de la thermodynamique.

Formulaire

- Force de rappel du ressort :

$$\vec{F} = \varepsilon k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})\vec{e}_x.$$

- Énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})^2.$$

- Travail élémentaire des forces de pression :

$$\delta W = -P_{ext}dV.$$

- Premier principe de la thermodynamique :

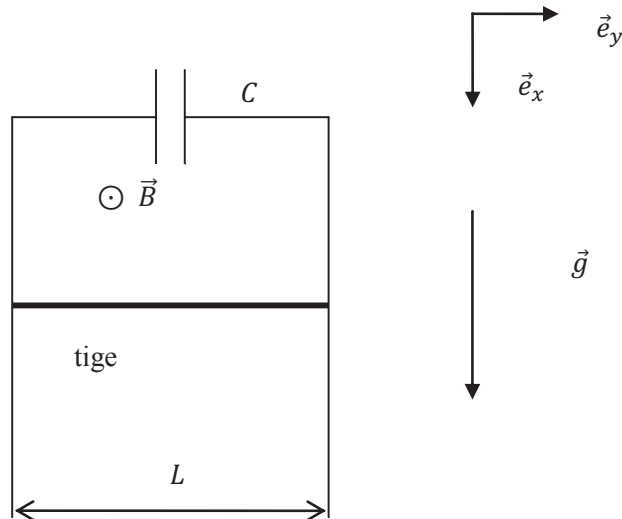
$$\Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = W + Q.$$

Énoncé

On considère une tige métallique de masse m , de longueur L qui peut se déplacer verticalement sur deux rails distants de L .

À l'instant $t = 0$, on lâche la tige.

- 1) En utilisant la loi de Lenz, justifier le sens du courant.
- 2) Déterminer la fem et l'intensité en fonction de B , C , L et de la vitesse de la tige notée v .
- 3) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ de la tige.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice d'induction.

- 1) Cette première question est assez simple et ne demande aucun calcul. Il suffit de se rappeler de la loi de Lenz

↪ Utiliser le fait que la loi de Lenz est une loi de modération. Trouver la direction du champ magnétique induit pour en déduire le sens du courant.

- 2) Il s'agit de déterminer la fem induite et le courant en négligeant la résistance.

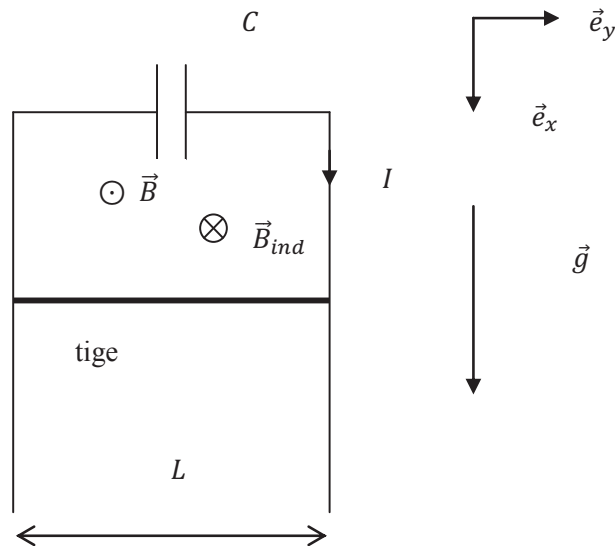
↪ Utiliser la loi de Faraday et l'équation électrique.

3) Pour déterminer l'accélération, il faut penser à tenir compte de la force de Laplace.

↪ Appliquer la deuxième loi de Newton à la tige.

Corrigé

1) La loi de Lenz précise que les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui leur donnent naissance. Ici, le flux du champ magnétique augmente et donc le champ magnétique induit va s'opposer à cette augmentation. Le courant va donc circuler afin de créer un champ magnétique opposé au champ magnétique présent. Nous obtenons donc le schéma suivant :



En utilisant la règle du tire-bouchon ou de la main droite, nous pouvons placer le courant dans le sens horaire comme indiqué sur le schéma.

2) Pour calculer la fem induite, il faut déterminer le flux du champ magnétique en supposant que le champ magnétique induit est très inférieur au champ magnétique appliqué. Nous avons donc le flux qui est :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

La normale est orientée par le sens de parcours qui est pris ici identique au sens de parcours du courant. La normale est donc rentrante et opposée au champ magnétique $\vec{B}$. Nous avons donc :

$$\phi = \iint -B dS = -B \iint dS = -BS.$$

La surface est donc égale en fonction de la position de la tige à :

$$S = Lx$$

où x est compté à partir de l'origine qui est prise pour la surface nulle.

La fem est donc égale, en fonction de la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$, à :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BLv.$$

La loi des mailles donne pour un circuit ne comprenant qu'une capacité :

$$e = \frac{q}{C}.$$

La résistance est ici négligée.

La relation entre la charge du condensateur et le courant est la suivante :

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Pour trouver le courant, il faut donc dériver l'équation de maille soit :

$$\frac{de}{dt} = \frac{I}{C}.$$

L'expression du courant en fonction de la vitesse est donc :

$$I = CBL \frac{dv}{dt}.$$

3) Afin de déterminer l'accélération de la tige, il faut trouver l'équation mécanique. Pour cela, nous appliquons la deuxième loi de Newton à la tige.

Le référentiel est galiléen. Les forces exercées sur la tige sont le poids et la force de Laplace. Nous supposons un contact parfait de telle sorte que les réaction de contact soient perpendiculaires au mouvement.

La deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Ox donne :

$$ma = mg + F_{\text{laplace}}.$$

La force de Laplace vaut :

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = I \int_{\text{tige}} d\vec{L} \wedge \vec{B} = -ILB\vec{e}_x.$$

Nous obtenons donc :

$$ma = mg - ILB.$$

En remplaçant par l'expression du courant trouvée à la question précédente, nous obtenons :

$$ma = mg - C(BL)^2 \frac{dv}{dt} = mg - C(BL)^2 a$$

$$a \left(1 + \frac{C(BL)^2}{m} \right) = g$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{C(BL)^2}{m}}$$

Nous constatons que l'accélération est inférieure à g qui correspond à l'accélération pour un mouvement de chute libre sans frottement.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de savoir utiliser correctement la loi de Lenz.

♡ Il faut se souvenir de savoir orienter le champ magnétique lorsque que le courant est connu ou inversement placer le courant lorsque la direction du champ magnétique est connue.

Rapport du jury 2017

Sur des exercices d'induction, certains candidats n'orientent pas le courant et ne représentent pas le schéma électrique équivalent. On attend des candidats une analyse physique de la situation. Les candidats doivent penser à détailler les processus électriques et mécaniques en jeu (variation du flux magnétique donc force électromotrice, donc courant induit, donc action mécanique...) et vérifier la loi de modération de Lenz.

♡ Il faut se souvenir que pour un phénomène d'induction, il est important d'écrire l'équation électrique et l'équation mécanique.

Rapport du jury 2016

En mécanique : toujours définir le système et le référentiel. Il FAUT également représenter toutes les forces extérieures appliquées au système.

Formulaire

- Loi de Lenz : c'est une loi de modération pour laquelle le phénomène d'induction s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.
- Flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

- Force électromotrice induite ou fem induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

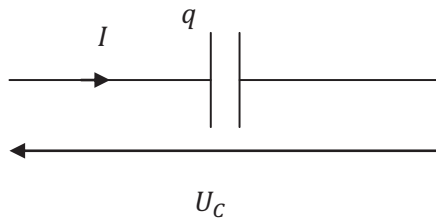
- Force de Laplace :

$$\vec{F}_{Laplace} = \int_{circuit} I d\vec{L} \wedge \vec{B}.$$

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

- Relation entre tension, charge et courant aux bornes d'un condensateur :



$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Jour n°7

Exercice 7.1

On a un récepteur radio qui doit capter les fréquences comprises entre 150 kHz et 300 kHz.

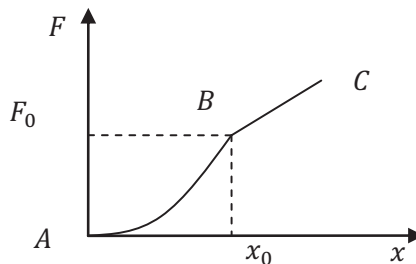
1) Le dispositif peut être modélisé par un circuit RLC série. On mesure la tension en sortie du condensateur. De quel type de filtre s'agit-il ? Déterminer sa fonction de transfert.

2) On donne $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $L = 1,15 \text{ H}$. Déterminer la valeur de la capacité C correspondant aux attentes.

Exercice 7.2

On place n moles d'eau dans un cylindre de longueur L et de section S . Ce cylindre est placé dans un thermostat à la température T . On place un piston au milieu du cylindre et on le déplace lentement vers la droite. Un opérateur exerce une force F pour maintenir l'équilibre du piston.

Cette force est représentée sur le graphe suivant :



On suppose que l'eau liquide est incompressible et on note P_{sat} la pression de vapeur saturante de l'eau.

1) Commenter l'expérience ainsi que le graphique.

2) On suppose que dans l'état initial, l'eau est à l'état entièrement gazeux. Déterminer l'expression de la force exercée par l'opérateur F en fonction de x . En déduire n et P_{sat} en fonction de F_0 , x_0 et des paramètres du problème.

3) Compléter le graphe lorsque l'eau est entièrement liquide. Déterminer l'expression de la force F lorsque l'eau est sous forme gazeuse et liquide.

Énoncé

On a un récepteur radio qui doit capter les fréquences comprises entre 150 kHz et 300 kHz.

- 1) Le dispositif peut être modélisé par un circuit RLC série. On mesure la tension en sortie du condensateur. De quel type de filtre s'agit-il ? Déterminer sa fonction de transfert.
- 2) On donne $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $L = 1,15 \text{ mH}$. Déterminer la valeur de la capacité C correspondant aux attentes.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'électrocinétique classique.

- 1) Il s'agit de prendre la tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série et de trouver sa fonction de transfert.

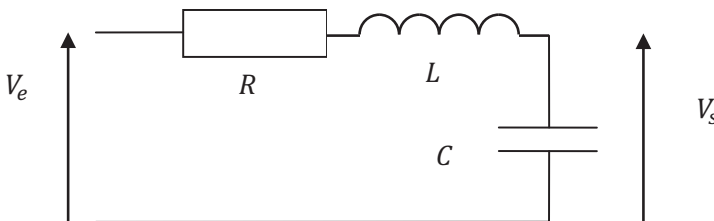
↪ Penser à faire un schéma du circuit et penser à utiliser la définition de la fonction de transfert. Cette question est sans difficulté.

- 2) Il faut déterminer la pulsation donnant la résonance en tension et la largeur de la bande passante. Ce calcul est assez long.

↪ Attention aux unités. Il est utile de connaître des ordres de grandeurs des capacités disponibles au labo.

Corrigé

- 1) On commence par faire un schéma du circuit :



Il faut se placer dans le cas d'un filtre passe-bande afin de laisser passer la bande de fréquence comprise entre 150 et 300 kHz. Dans ce cas le facteur de qualité du montage doit être supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$.

La fonction de transfert est donnée par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}.$$

Nous avons ici affaire à un diviseur de tension donc :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

En divisant par $\underline{Z}_C$ et en remplaçant les impédances par leurs expressions en fonction de la pulsation, nous obtenons :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Le module de la fonction de transfert vaut :

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

Nous pouvons pour simplifier les expressions en introduisant les notations suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

Transformons l'expression :

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{RC}{\sqrt{LC}}x\right)^2}}$$

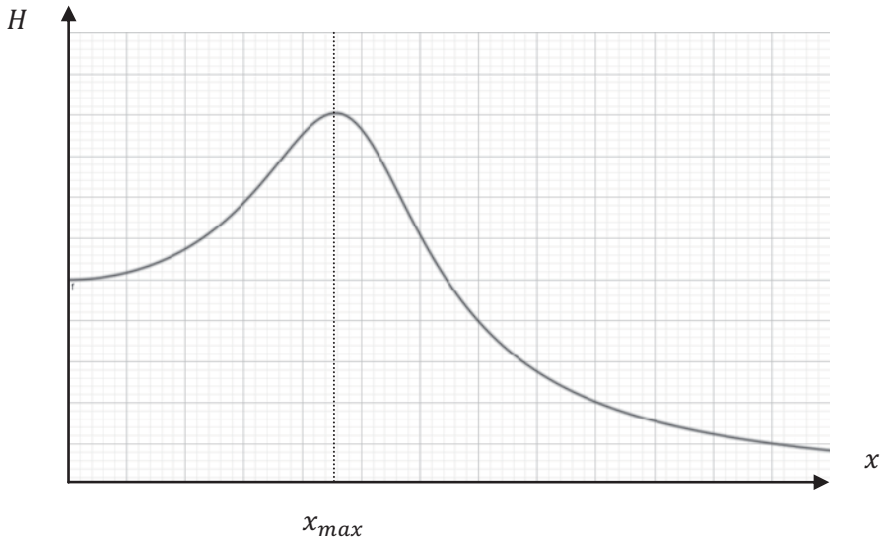
$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}}x\right)^2}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Nous retrouvons l'expression du facteur de qualité Q qui est :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'allure de la fonction de transfert est donc la suivante :



2) Il faut maintenant déterminer la fréquence correspondant au maximum de la fonction de transfert.

Le maximum de H correspond au minimum de la fonction suivante :

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2.$$

Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times 2x(x^2 - 1) + \frac{2x}{Q^2}.$$

La dérivée est nulle pour $x = 0$ et pour :

$$2(x^2 - 1) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

Cette condition n'est valable que si :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans ce cas le maximum vaut :

$$H_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}}$$

$$H_{max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

$$H_{max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

La fréquence correspondant au maximum est donc donnée par :

$$x = \frac{f_m}{f_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

La fréquence du maximum correspond à la fréquence moyenne c'est-à-dire :

$$f_m = \frac{150 + 300}{2} = 225 \text{ kHz}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Nous obtenons la relation suivante :

$$\left(\frac{f_m}{f_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$f_m^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right) = \frac{1}{4\pi^2 LC} - \frac{R^2}{8\pi^2 L^2}$$

$$\frac{1}{LC} = 4\pi^2 f_m^2 + \frac{R^2}{2L^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_m^2 L + \frac{R^2}{2L}}$$

L'application numérique donne :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \times (225 \cdot 10^3)^2 \times 1,15 \cdot 10^{-3} + \frac{(10^3)^2}{2 \times 1,15 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\boxed{C = 3,66 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 366 \text{ pF.}}$$

Nous pouvons calculer le facteur de qualité du circuit qui vaut :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10^3} \sqrt{\frac{1,15 \cdot 10^{-3}}{3,66 \cdot 10^{-10}}} = 1,8.$$

Ce n'est pas un filtre très sélectif.

Il faudrait déterminer la bande passante afin d'être sûr que le filtre convienne. Ce n'est pas certain que ce calcul soit exigé au niveau du concours.

Pour cela nous écrivons la condition donnant les pulsations ou fréquences de coupures :

$$H(x_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

Nous obtenons le système suivant :

$$(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 = \frac{2}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}$$

$$1 - 2x^2 + x^4 + \frac{x^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}$$

$$x^4 + x^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + 1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4} = 0.$$

Nous posons :

$$X = x^2$$

$$X^2 + X \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + 1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4} = 0.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4}\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 4 - 4 + \frac{8}{Q^2} - \frac{2}{Q^4} = -\frac{1}{Q^4} + \frac{4}{Q^2} > 0.$$

En effet, $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $Q > \frac{1}{2}$.

Les solutions sont donc :

$$X = \frac{-\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \pm \sqrt{-\frac{1}{Q^4} + \frac{4}{Q^2}}}{2}.$$

Nous obtenons donc les deux valeurs de x_c en prenant les deux racines carrées positives :

$$x_{c1} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

$$x_{c2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

Les applications numériques donnent :

$$x_{c1} = \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 1,8^2} + \sqrt{\frac{1}{1,8^2} - \frac{1}{4 \times 1,8^4}}} = 1,17$$

$$x_{c2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 1,8^2} - \sqrt{\frac{1}{1,8^2} - \frac{1}{4 \times 1,8^4}}} = 0,56.$$

Nous obtenons les fréquences de coupures qui sont :

$$f_{c1} = f_0 x_{c1} = 225 \times 1,17 = 263,25 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = f_0 x_{c2} = 225 \times 0,56 = 126,00 \text{ kHz}.$$

La bande passante est donc assez bien couverte et nous pouvons conclure que le filtre convient.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de déterminer correctement le module de la fonction de transfert.

Rapport du jury 2017

En régime sinusoïdal permanent, les calculs menés en notation complexe laissent apparaître un manque de maîtrise évident.

Rapport du jury 2017

Les candidats ont beaucoup de difficultés avec les outils mathématiques (résolution des équations différentielles, passage complexe/réel, introduction inutile d'inconnues dans les équations), la réalisation des schémas et les représentations graphiques sont – trop souvent – rudimentaires et clairement sous-exploitées.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement la définition des pulsations de coupure.

Rapport du jury 2017

Globalement, les théorèmes généraux sont connus même si leur exploitation et leur application sont difficiles.

♡ Il faut se souvenir des propriétés du circuit RLC série et principalement de la résonance en tension aux bornes du condensateur.

Formulaire

- Impédances complexes :

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}.$$

- Module d'un nombre complexe :

$$\begin{aligned} |a + jb| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \left| \frac{1}{a + jb} \right| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \left| \frac{c + jd}{a + jb} \right| &= \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

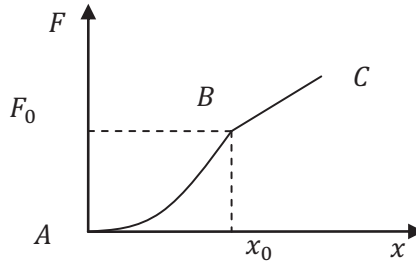
- Les pulsations de coupure vérifient la relation suivante :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Énoncé

On place n moles d'eau dans un cylindre de longueur L et de section S . Ce cylindre est placé dans un thermostat à la température T . On place un piston au milieu du cylindre et on le déplace lentement vers la droite. Un opérateur exerce une force F pour maintenir l'équilibre du piston.

Cette force est représentée sur le graphe suivant :



On suppose que l'eau liquide est incompressible et on note P_{sat} la pression de vapeur saturante de l'eau.

- 1) Commenter l'expérience ainsi que le graphique.
- 2) On suppose que dans l'état initial, l'eau est à l'état entièrement gazeux. Déterminer l'expression de la force exercée par l'opérateur F en fonction de x . En déduire n et P_{sat} en fonction de F_0 , x_0 et des paramètres du problème.
- 3) Compléter le graphe lorsque l'eau est entièrement liquide. Déterminer l'expression de la force F lorsque l'eau est sous forme gazeuse et liquide.

Analyse stratégique de l'énoncé

Nous avons affaire à un exercice de thermodynamique qui demande une bonne connaissance du cours sur les changements d'états. Il est assez original et permet de voir si le cours est bien compris par l'étudiant.

- 1) Cette première question vous invite à commenter le graphe et à remarquer la discontinuité de la pente de la courbe.

↪ Penser à un éventuel changement d'état.

- 2) Nous devons maintenant retrouver l'expression de la force pour les déplacements avant le changement d'état.

↪ Bien lire l'énoncé et traiter le gaz comme un gaz parfait de chaque côté du piston.

- 3) Il faut réfléchir au cas où l'eau est complètement liquide.

↪ Le liquide est considéré comme incompressible donc le volume n'est pas

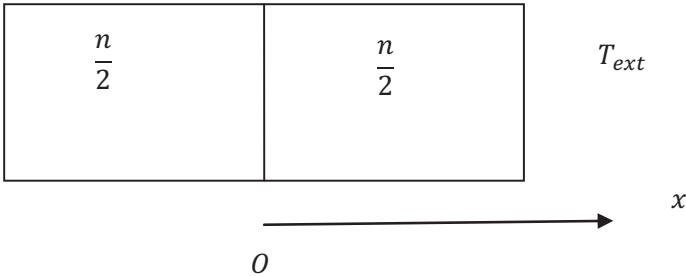
modifié quelle que soit la force exercée sur le piston.

Pour déterminer la force lorsqu'il y a un mélange de liquide et de gaz, il faut bien se souvenir de son cours.

↪ Lorsque l'on est en présence d'un mélange liquide gaz, la pression est constante et égale à la pression de vapeur saturante.

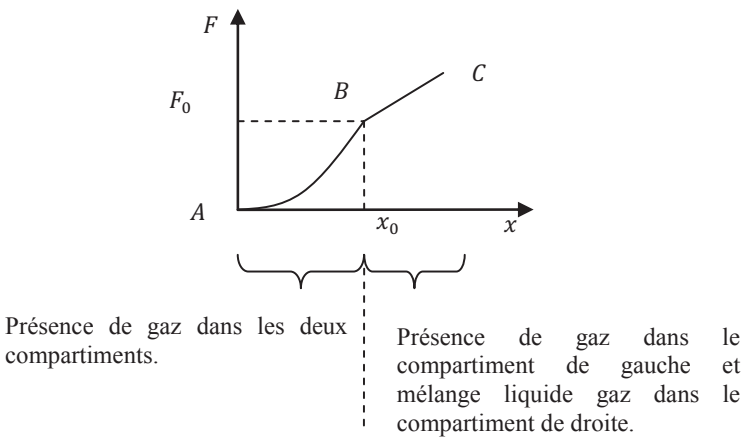
Corrigé

1) Commençons par faire un schéma de l'expérience. Le piston sépare les n moles d'eau en deux. Nous avons donc :



Lorsque l'on déplace le piston vers la droite le gaz se trouvant à droite se comprime et celui se trouvant à gauche se détend. Ceci est valable tant que les deux compartiments contiennent du gaz. Lorsque la pression devient égale à la pression de vapeur saturante dans le compartiment de droite, l'eau va commencer à se liquéfier. Ceci se produit à partir de la valeur x_0 . Nous avons donc un changement de pente dans le graphe représentant la force en fonction de la position. Lorsque l'on est en présence des deux phases la pression reste égale à la pression de vapeur saturante.

Nous pouvons donc interpréter la courbe :



2) La pression du gaz à gauche est notée P_g et celle du gaz de droite est notée P_d . La force de pression exercée par le gaz de gauche sur le piston vaut :

$$\vec{F}_g = P_g S \vec{e}_x.$$

La force de pression exercée par le gaz de droite sur le piston vaut :

$$\vec{F}_d = -P_d S \vec{e}_x$$

Le piston est maintenu en équilibre par un opérateur qui exerce une force $\vec{F} = F \vec{e}_x$ sur le piston.

La condition d'équilibre du piston est donc la suivante :

$$P_g S + F - P_d S = 0.$$

Nous avons donc :

$$F = (P_d - P_g)S.$$

Reste à déterminer les pressions dans les deux compartiments.

La loi des gaz parfaits donne :

$$P_g V_g = \frac{n}{2} RT$$

$$P_d V_d = \frac{n}{2} RT.$$

Lorsque le piston est dans la position $x \leq x_0$, nous avons :

$$V_g = S \left(\frac{L}{2} + x \right)$$

$$V_d = S \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

Les pressions sont donc :

$$P_g = \frac{n}{2} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} + x \right)}$$

$$P_d = \frac{n}{2} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} - x \right)}.$$

En remplaçant dans l'expression de la force, nous obtenons :

$$F = \frac{n}{2} RT \left(\frac{1}{\frac{L}{2} - x} - \frac{1}{\frac{L}{2} + x} \right)$$

$$F = \frac{n}{2} RT \left(\frac{\frac{L}{2} + x - \left(\frac{L}{2} - x \right)}{\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2} \right)$$

$$F = nRT \left(\frac{x}{\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2} \right).$$

Pour $x = x_0$, nous avons $F = F_0$ soit :

$$n = \frac{F_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 - x_0^2}{RT x_0}.$$

La pression dans le compartiment de droite est égale à la pression de vapeur saturante soit :

$$P_d = P_{sat} = \frac{n}{2} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} - x_0\right)}$$

$$P_{sat} = \frac{F_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 - x_0^2}{2RT x_0} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} - x_0\right)}$$

$$P_{sat} = \frac{F_0 \left(\frac{L}{2} + x_0\right)}{2S x_0}.$$

D'après le graphique, nous pouvons en déduire le nombre de moles et la pression de vapeur saturante.

3) Tant que l'eau se liquéfie, la pression dans le compartiment de droite reste égale à la pression de vapeur saturante. Nous avons donc :

$$P_d = P_{sat}.$$

La pression dans le compartiment de gauche a donc la même expression que dans la question précédente :

$$P_g = \frac{n}{2} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} + x\right)}.$$

La force exercée sur le piston est encore :

$$F = (P_d - P_g)S$$

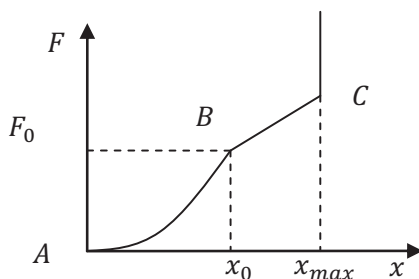
$$F = \left(P_{sat} - \frac{n}{2} \frac{RT}{S \left(\frac{L}{2} + x\right)} \right) S$$

$$F = \left(P_{sat} - \frac{nRT}{S(L + 2x)} \right) S.$$

L'expression de la force est donc différente de celle de la question précédente.

Lorsque l'eau est complètement liquéfiée, nous avons donc une compression du liquide qui est considéré comme incompressible. Dans ce cas le volume reste constant. Donc x reste constant et la force augment avec une pente infinie.

Nous avons donc le schéma suivant :



Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'essayer de comprendre physiquement ce qui peut se produire afin de construire sa démarche de résolution.

Rapport du jury 2016

Pour conclure sur ce thème, un exercice de mécanique doit débiter, autant que possible, par une discussion physique qui, en plus de présenter les phénomènes en jeu, permettra de dégager la meilleure stratégie de résolution. Trop de candidats, faisant fi de cette étape, se plongent directement dans un ensemble décousu d'équations dont ils ne savent que faire une fois qu'elles ont été écrites.

♡ Il faut se souvenir que le changement de phase se fait à pression et température constantes.

Rapport du jury 2016

Les changements d'état ont tendance à effrayer les candidats.

♡ Il faut se souvenir de l'expression de la force de pression.

♡ Il faut se souvenir qu'un liquide est un fluide est quasi-incompressible.

Formulaire

- Loi du gaz parfait :

$$PV = nRT.$$

- Force de pression :

$$\vec{F}_p = \pm P\vec{S}$$

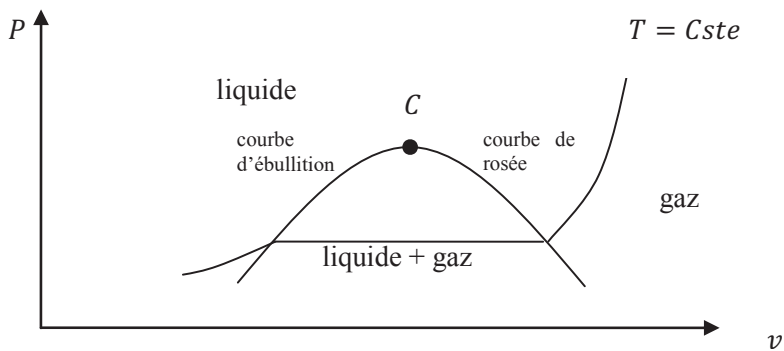
- Pression de vapeur saturante : c'est la pression du gaz lorsque ce dernier est en présence de sa phase liquide.

$$P = P_{sat}.$$

- Fluide incompressible :

$$V = Constante.$$

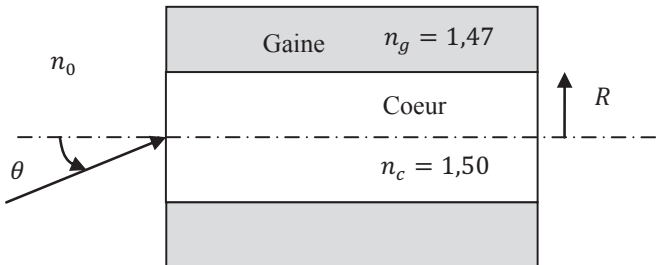
- Diagramme de Clapeyron pour un corps pur :



Jour n°8

Exercice 8.1

On souhaite envoyer un faisceau lumineux à l'infini, en jouant sur des réflexions totales au niveau du dioptré cœur-gaine de la fibre optique à saut d'indice.



- 1) Déterminer l'angle limite θ_{lim} pour qu'il y ait une transmission à l'infini.
- 2) Déterminer l'ouverture numérique notée ON et définie par : $ON = n_0 \sin \theta_{lim}$.

On suppose maintenant que la gaine a une longueur L .

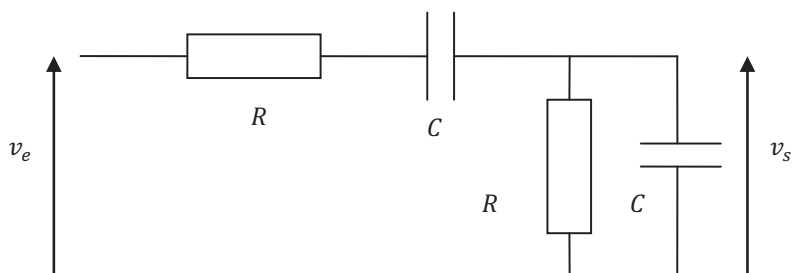
- 3) Calculer la distance parcourue par le rayon lumineux qui fait un angle θ_{lim} et en déduire le chemin optique qui est défini par :

$$\delta = \text{indice du milieu} \times \text{distance du trajet}.$$

- 4) Déterminer la différence de temps entre les deux trajets extrêmes pour une fibre optique ayant une longueur de 1 km.

Exercice 8.2

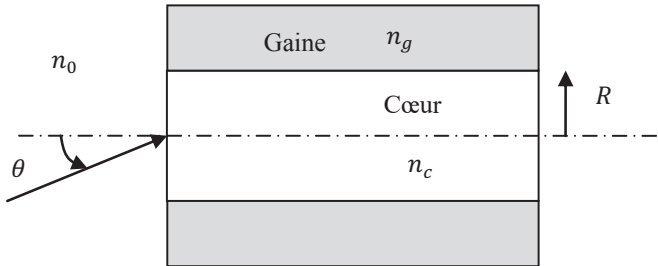
Déterminer la fonction de transfert du filtre suivant :



La fréquence du maximum vaut 1000 Hz et la bande passante a une largeur de 300 Hz. Déterminer R et C .

Énoncé

On souhaite envoyer un faisceau lumineux à l'infini, en jouant sur des réflexions totales au niveau du dioptré cœur-gaine de la fibre optique à saut d'indice.



- 1) Déterminer l'angle limite θ_{lim} pour qu'il y ait une transmission à l'infini.
- 2) Déterminer l'ouverture numérique notée ON et définie par : $ON = n_0 \sin \theta_{lim}$.

On suppose maintenant que la gaine a une longueur L .

- 3) Calculer la distance parcourue par le rayon lumineux qui fait un angle θ_{lim} et en déduire le chemin optique qui est défini par :

$$\delta = \text{indice du milieu} \times \text{distance du trajet}.$$

- 4) Déterminer la différence de temps entre les deux trajets extrêmes pour une fibre optique ayant une longueur de 1 km.

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur l'optique géométrique et en particulier sur la réflexion totale

- 1) Nous voulons transmettre un rayon lumineux par la fibre optique. Il faut donc que ce dernier se réfléchisse totalement sur la gaine. Cette question est très importante car les questions suivantes en dépendent.

↪ Utiliser les lois de Descartes et bien faire attention à la position de la normale au dioptré. Ne pas se tromper et prendre son temps pour cette question importante.

- 2) Cette question ne pose aucune difficulté.

↪ Il suffit d'utiliser la définition donnée.

- 3) Cette question reste encore simple si l'on pense à faire un schéma.

↪ Utiliser les résultats de la première question.

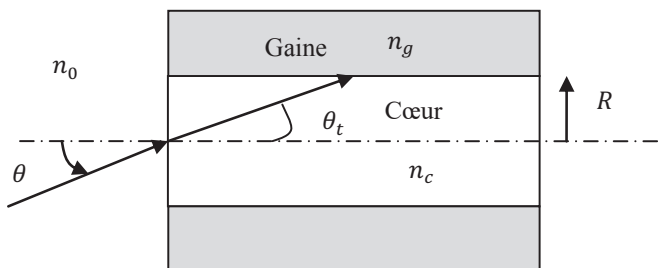
4) Commencer par définir des deux trajets extrêmes. Penser à faire un schéma.

↪ Utiliser la relation entre la distance, la vitesse de propagation et le temps.

Corrigé

1) Pour que le rayon lumineux soit transmis par la fibre, il doit rentrer dans le cœur de la fibre et se réfléchir totalement au niveau de la gaine.

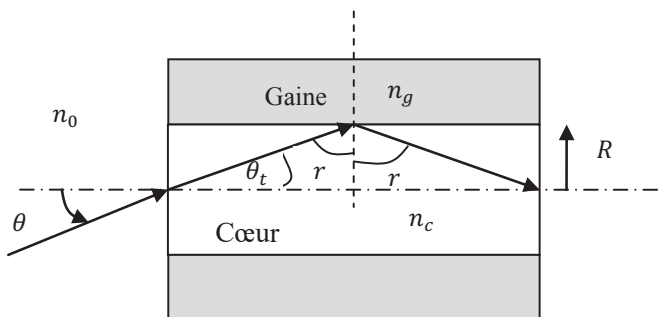
Pour cela, il faut commencer par écrire les relations de Descartes au niveau de l'entrée dans la gaine.



En utilisant le schéma, nous obtenons grâce à la deuxième loi de Descartes pour la transmission :

$$n_0 \sin \theta = n_c \sin \theta_t.$$

Ensuite, il faut une réflexion totale au niveau de la gaine. Nous avons donc le schéma suivant :



Il faut penser à bien positionner la normale au niveau de la gaine. La deuxième loi de Descartes s'écrit dans le cas de la transmission :

$$n_c \sin r = n_g \sin t$$

où t correspond à l'angle du rayon transmis.

Ici, il ne faut pas de transmission donc nous devons avoir la condition de réflexion totale qui est :

$$\frac{n_c}{n_g} \sin r > 1.$$

Il faut maintenant utiliser ces deux relations pour trouver la condition sur l'angle d'entrée.

La relation entre les angles θ_t et r s'obtient en sommant les angles du triangle soit :

$$\theta_t + r = \frac{\pi}{2}.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{n_c}{n_g} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) &> 1 \\ \frac{n_c}{n_g} \cos(\theta_t) &> 1 \\ \cos(\theta_t) &> \frac{n_g}{n_c}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première équation, nous obtenons :

$$n_0 \sin \theta = n_c \sin \theta_t = n_c \sqrt{1 - \cos^2 \theta_t}.$$

Pour l'angle limite, nous avons donc :

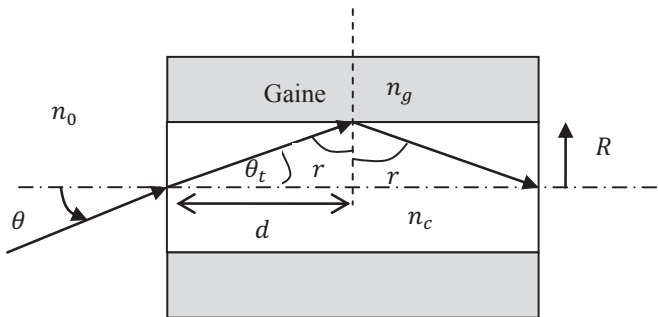
$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta_{lim} &= n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} \\ \sin \theta_{lim} &= \frac{n_c}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} \\ \theta_{lim} &= \arcsin\left(\frac{n_c}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Afin d'avoir une transmission à l'infini, il faut donc que l'angle d'entrée soit compris entre 0 et θ_{lim} .

2) L'ouverture numérique est donnée dans l'énoncé par :

$$\begin{aligned} ON &= n_0 \sin \theta_{lim} \\ ON &= n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}. \end{aligned}$$

3) Commençons par faire un schéma du trajet du rayon lumineux qui fait un angle θ_{lim} .



Pour une longueur de fibre d , la distance parcourue par le rayon lumineux vaut :

$$d' = \frac{d}{\cos \theta_t}.$$

La distance parcourue pour la fibre de longueur L est donc :

$$L' = \frac{L}{\cos \theta_t}.$$

Il faut maintenant remplacer θ_t . Nous avons trouvé que pour l'angle limite :

$$n_0 \sin \theta_{lim} = n_c \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_t = \frac{n_0}{n_c} \sin \theta_{lim} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2\right)}$$

$$\cos \theta_t = \frac{n_g}{n_c}.$$

Nous obtenons ainsi la distance totale parcourue :

$$L' = \frac{n_c L}{n_g}.$$

Le chemin optique parcouru est donc en utilisant la définition donnée :

$$\delta = n_c L' = \frac{n_c^2 L}{n_g}.$$

*La notion de chemin optique est au programme de PC, MP et PT.
La définition ne sera certainement pas redonnée au concours.*

4) La lumière se propage dans le milieu d'indice n_c à la vitesse :

$$v = \frac{c}{n_c}$$

où c représente la célérité des ondes lumineuses dans le vide.

Le temps mis pour parcourir la distance L est donc :

$$t_L = \frac{L}{v} = \frac{n_c L}{c}.$$

Pour parcourir le chemin le plus grand, le temps vaut :

$$t_{L'} = \frac{n_g^2 L}{n_g c}.$$

L'intervalle de temps est donc :

$$\Delta t = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right).$$

L'application numérique donne :

$$\Delta t = \frac{1,50 \times 1000}{3 \cdot 10^8} \left(\frac{1,50}{1,47} - 1 \right) = 10^{-7} \text{ s.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement les lois de Descartes, d'orienter les angles et de simplifier au maximum les expressions.

Rapport du jury 2016

De nombreux candidats ont du mal avec ces notions pourtant élémentaires. Rares sont les exercices traités correctement. Il faut faire la différence entre distance et distance algébrique. Il est indispensable de maîtriser le théorème de Thalès et d'orienter les angles.

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de faire des schémas.

Rapport du jury 2016

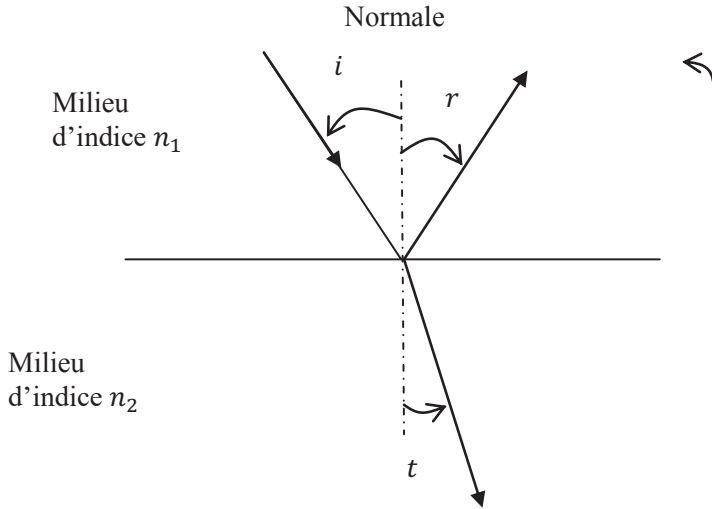
Beaucoup trop de candidats rechignent à appuyer leur démarche sur des schémas clairs, simples et rigoureux, c'est pourtant souvent le gage d'une démonstration réussie.

♡ Il faut se souvenir de la condition de réflexion totale.

Rapport du jury 2016

La réflexion totale est rarement maîtrisée.

Formulaire



- Lois de Descartes à la réflexion :

Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence (qui est défini par le rayon incident et la normale au dioptre) et $i = -r$.

Lois de Descartes à la transmission :

Le rayon transmis appartient au plan d'incidence et $n_1 \sin i = n_2 \sin t$.

- Conditions de réflexion totale :

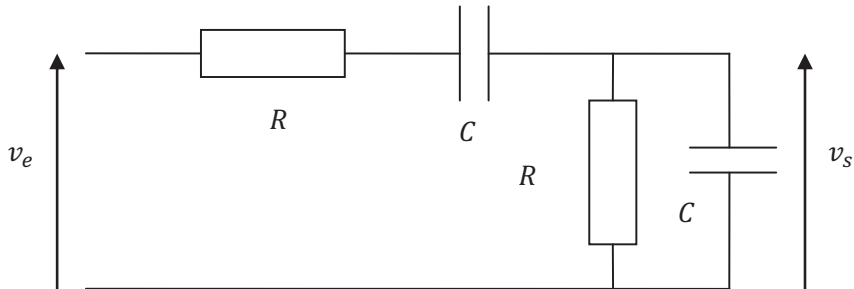
$$n_1 > n_2$$
$$\frac{n_1}{n_2} \sin i > 1.$$

- Vitesse de propagation dans un milieu d'indice n :

$$v = \frac{c}{n}.$$

Énoncé

Déterminer la fonction de transfert du filtre suivant :



La fréquence du maximum vaut 1000 Hz et la bande passante a une largeur de 300 Hz. Déterminer R et C .

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice pourtant sur l'étude d'un filtre en électrocinétique. Il faut, dans un premier temps, déterminer la fonction de transfert afin de pouvoir authentifier les différents termes.

↪ Le filtre peut se mettre sous la forme d'un simple diviseur de tension.

Il faut ensuite déterminer la fréquence correspondant au maximum de la fonction de transfert.

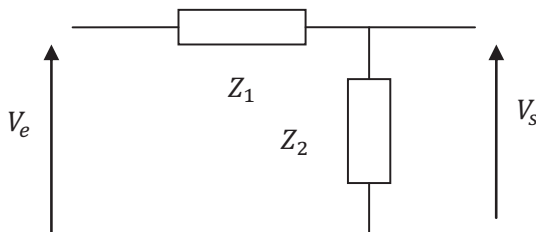
↪ Attention à ne pas confondre la pulsation et la fréquence.

Il faut ensuite déterminer la bande passante.

↪ Revenir à la définition des fréquences ou pulsations de coupure.

Corrigé

On représente le filtre sous la forme simpliste suivante :



On a donc bien un diviseur de tension et la fonction de transfert est donnée par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

On peut mettre beaucoup de filtres sous cette forme. On a affaire à un diviseur de tension.

On remarque que Z_1 est l'impédance d'une résistance et d'une capacité en série soit :

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

Attention à ne pas se tromper pour l'impédance du condensateur.

L'impédance Z_2 correspond à l'impédance d'une résistance et d'une impédance en parallèle, on a donc :

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + jC\omega.$$

On observe l'expression de l'impédance et afin de remplacer les expressions des impédances, on a l'idée de diviser par Z_2 . On obtient ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1}.$$

Cette expression permet de simplifier énormément les calculs. Beaucoup de fonctions de transfert peuvent se calculer par cette méthode.

Maintenant que l'expression est sous la forme adéquate, on peut remplacer les impédances. On obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) + 1}.$$

On peut maintenant développer le produit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

On détermine maintenant le module de la fonction de transfert qui vaut :

$$H = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$$

On a donc le maximum qui est donné pour la relation suivante :

$$\begin{aligned} RC\omega - \frac{1}{RC\omega} &= 0 \\ RC\omega &= 1 \\ \omega &= \frac{1}{RC}. \end{aligned}$$

La fréquence du maximum est donc :

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

On obtient la première équation qui peut nous donner la valeur de la capacité.

On a donc :

$$C = \frac{1}{2\pi R f_{max}}.$$

L'application numérique donne :

$$C = \frac{1}{2\pi \times 1000 \times 1000} = 0,16 \mu\text{F}.$$

Le maximum vaut :

$$H_{max} = \frac{1}{3}.$$

Le maximum n'est pas toujours égal à 1.

Maintenant, il faut déterminer la bande passante. Elle est définie par :

$$H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

On écrit cette définition pour le filtre donné et on obtient :

$$H = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

On remarque que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{18}}.$$

On voit donc que l'on doit avoir l'équation suivante pour les pulsations de coupure :

$$\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2} = \sqrt{18}$$

$$\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2 = 9.$$

On prend la racine carrée :

$$RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = \pm 3.$$

Cette équation permet de trouver la largeur de la bande passante sans résoudre le système. Le diagramme de Bode étant symétrique, on obtient la différence des pulsations de coupure.

En développant l'expression, on obtient deux équations du second degré :

$$(RC)^2\omega^2 \pm 3RC\omega - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 9(RC)^2 + 4(RC)^2 = 13(RC)^2 > 0.$$

On a donc 4 solutions qui sont :

$$\omega = \frac{\pm 3RC \pm \sqrt{\Delta}}{2(RC)^2}.$$

Il faut conserver les deux grandeurs positives qui sont :

$$\omega_{c1} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2RC}$$

$$\omega_{c2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2RC}.$$

On a donc la largeur de la bande passante qui vaut :

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{3}{RC}$$

La largeur de la bande passante en fréquence est donc :

$$\Delta f = \frac{3}{2\pi RC}$$

$$\boxed{\Delta f = 3f_{max}}.$$

L'application numérique donne :

$$\Delta\omega = 3 \times 1000 = 3000 \text{ Hz.}$$

Ce filtre a une largeur de bande passante égale à 3 fois la fréquence du maximum.

Techniques à mémoriser

- ♡ Il faut se souvenir des impédances complexes de la résistance et de la capacité.
- ♡ Il faut se souvenir du diviseur de tension.
- ♡ Il faut se souvenir de la relation entre la valeur expérimentale du maximum de la fonction de transfert et la valeur théorique.

Rapport du jury 2016

L'exploration d'un diagramme de Bode ou l'enregistrement d'un régime transitoire n'est que rarement bien menée. Il est pourtant attendu d'un candidat qu'il sache déterminer des grandeurs caractéristiques d'un filtre à partir de l'exploration d'un diagramme de Bode.

- ♡ Il faut se souvenir de la résolution d'une équation du second ordre.

Formulaire

- Impédance complexe d'une résistance :

$$Z_R = R.$$

- Impédance complexe d'un condensateur :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Module du nombre complexe :

$$\left| \frac{1}{a + jb} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Définition des pulsations de coupure :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Jour n°9

Exercice 9.1

Un moteur fonctionne avec une masse m d'eau. Cette masse d'eau subit les transformations suivantes :

AB : transformation isotherme (le point A étant du liquide saturant à la température T_1 et à la pression P_1 ; le point B à une pression P_2) ;

BC : échauffement réversible isobare qui amène l'eau à la température T_2 ; le point C est constitué de liquide saturant ;

CD : vaporisation totale sous la pression P_2 et à la température T_2 ;

DE : détente adiabatique réversible jusqu'à la température T_1 ;

EA : liquéfaction totale à la température T_1 .

La capacité thermique de l'eau liquide vaut : $c_{liq} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Dans le tableau suivant, on donne les caractéristiques des points se trouvant sur la courbe de saturation aux pressions P_1 et P_2 .

P bar	T K	v_l $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	v_g $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	h_l $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	h_g $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
$P_1 = 0,250$	338,15	$1,02 \cdot 10^{-3}$	6,202	272,02	2618,4
$P_2 = 1,208$	378,15	$1,05 \cdot 10^{-3}$	1,419	440,17	2683,7

1) Dessiner le cycle dans le diagramme de Clapeyron (pression en fonction du volume). On fera apparaître la courbe de saturation.

2) Calculer les variations d'entropie suivantes : $S_B - S_A$, $S_C - S_B$, $S_D - S_C$ et $S_E - S_D$.

3) Soit x , la fraction massique de vapeur en E . Déterminer x littéralement puis numériquement.

4) Calculer les transferts thermiques échangés lors des transformations BCD et EA .

5) Déterminer le rendement de ce cycle. Application numérique.

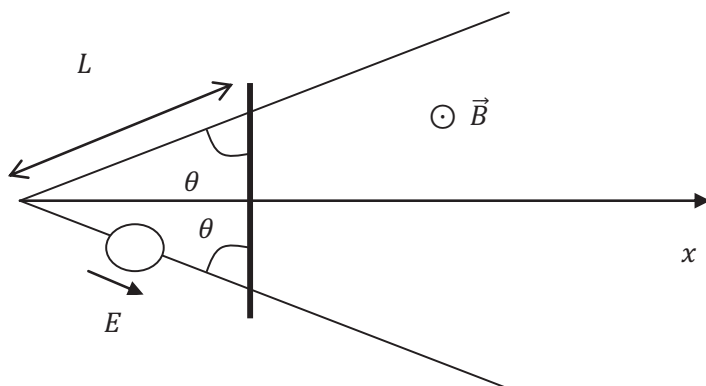
Données : La variation d'entropie pour une phase condensée est égale à :

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right).$$

La variation d'entropie pour un changement d'état qui fait passer l'eau de l'état liquide à l'état gazeux vaut :

$$\Delta S = m \frac{l_{vap}(T)}{T}.$$

Exercice 9.2



On considère deux rails conducteurs formant un V . Un générateur de fem E est inséré dans le circuit sur le rail inférieur. Une tige de longueur L et de masse m est posée sur ces deux rails. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan des rails. On note λ la résistance linéique des rails et de la tige.

À l'instant initial, la tige est immobile et se trouve à la distance L du point d'intersection des deux rails (voir schéma). On néglige les frottements de la tige sur les rails et l'auto-induction.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable x . Donner les conditions qui permettraient de déterminer la vitesse de la tige lorsque cette dernière quitte les rails.

Énoncé

Un moteur fonctionne avec une masse m d'eau. Cette masse d'eau subit les transformations suivantes :

AB : transformation isotherme (le point A étant du liquide saturant à la température T_1 et à la pression P_1 ; le point B à une pression P_2) ;

BC : échauffement réversible isobare qui amène l'eau à la température T_2 ; le point C est constitué de liquide saturant ;

CD : vaporisation totale sous la pression P_2 et à la température T_2 ;

DE : détente adiabatique réversible jusqu'à la température T_1 ;

EA : liquéfaction totale à la température T_1 .

La capacité thermique de l'eau liquide vaut : $c_{liq} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Dans le tableau suivant, on donne les caractéristiques des points se trouvant sur la courbe de saturation aux pressions P_1 et P_2 .

P bar	T K	v_l $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	v_g $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	h_l $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	h_g $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
$P_1 = 0,250$	338,15	$1,02 \cdot 10^{-3}$	6,202	272,02	2618,4
$P_2 = 1,208$	378,15	$1,05 \cdot 10^{-3}$	1,419	440,17	2683,7

1) Dessiner le cycle dans le diagramme de Clapeyron (pression en fonction du volume). On fera apparaître la courbe de saturation.

2) Calculer les variations d'entropie suivantes : $S_B - S_A$, $S_C - S_B$, $S_D - S_C$ et $S_E - S_D$.

3) Soit x , la fraction massique de vapeur en E . Déterminer x littéralement puis numériquement.

4) Calculer les transferts thermiques échangés lors des transformations BCD et EA .

5) Déterminer le rendement de ce cycle. Application numérique.

Données : La variation d'entropie pour une phase condensée est égale à :

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right).$$

La variation d'entropie pour un changement d'état qui fait passer l'eau de l'état liquide à l'état gazeux vaut :

$$\Delta S = m \frac{l_{vap}(T)}{T}.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur les machines thermodynamiques avec changement d'état.

1) Il s'agit ici de tracer le diagramme de Clapeyron de l'eau, c'est-à-dire le diagramme représentant la pression en fonction du volume. Il faut absolument penser à tracer la courbe de saturation pour commencer. Ensuite, on tracera les deux isothermes entre lesquelles le moteur fonctionne. Reste enfin à placer correctement les points. Cette question est primordiale pour la suite du sujet.

↪ Il faut bien connaître son cours sur les changements d'état du corps pur.

2) On doit maintenant calculer des variations d'entropie. Cette question n'est pas très compliquée. Toutes les transformations sont réversibles, donc il suffit d'appliquer les expressions données de la variation d'entropie pour un liquide et pour les changements d'état.

↪ Il faut surtout faire attention à bien définir la nature de la transformation ainsi que l'état initial et l'état final pour chaque transformation.

3) Il s'agit de calculer la fraction massique de vapeur dans le mélange. Il faut donc calculer la variation d'entropie pour la transformation EA et on doit ensuite utiliser le fait que l'eau décrit un cycle réversible, donc la variation totale d'entropie est nulle.

↪ Pour une transformation cyclique réversible, la variation d'entropie est nulle. Ce n'est pas le cas pour une transformation irréversible (la variation d'entropie est positive).

4) Il s'agit maintenant de déterminer les quantités de chaleur échangées. Le résultat est positif si le fluide reçoit effectivement de la chaleur. Attention pour le premier calcul, il y a d'abord échauffement du liquide puis vaporisation. Pour le second calcul, il y a liquéfaction partielle.

↪ Il faut bien utiliser les définitions des quantités de chaleur échangées pour un liquide et pour un changement d'état.

5) Cette question n'est pas compliquée. Il faut utiliser le premier principe de la thermodynamique pour un cycle. Pour déterminer le rendement, il faut se souvenir de son expression ; c'est toujours gain sur dépenses.

↪ La variation d'énergie interne pour un cycle est nulle que la transformation soit réversible ou irréversible.

Corrigé

1) Nous allons donc représenter les différentes transformations dans le diagramme de Clapeyron, c'est-à-dire dans le diagramme représentant la pression en fonction de la température.

Nous commençons par représenter la courbe de saturation (en pointillés) afin de ne pas omettre les changements d'état de l'eau.

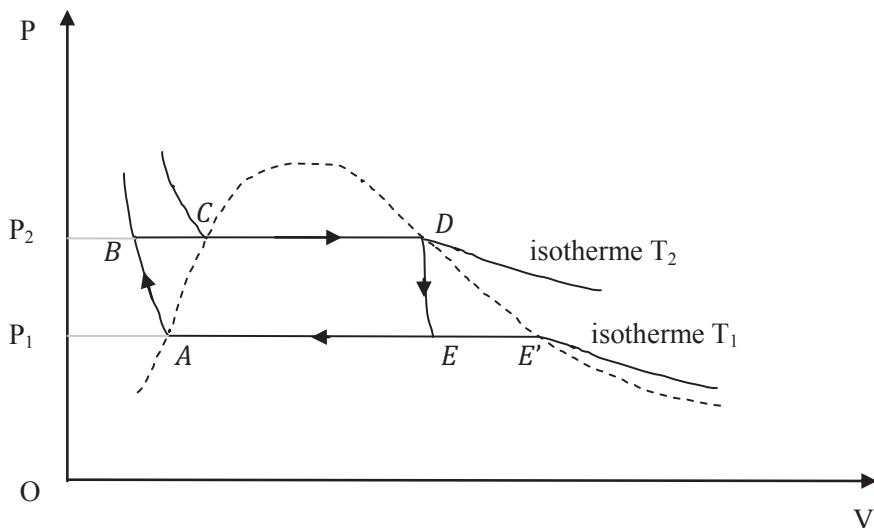
Ensuite nous représentons les deux isothermes T_1 et T_2 . Pour l'isotherme T_1 , nous avons le palier isotherme et isobare à la pression P_1 entre A et E' , puis l'isotherme du liquide entre A et B .

Pour l'isotherme T_2 , il suffit de représenter le palier isotherme et isobare à la pression P_2 .

Le point A est du liquide saturant à T_1 et P_1 . Pour placer le point B , il suffit de suivre l'isotherme T_1 jusqu'à la pression P_2 . Ensuite la transformation est isobare à la pression P_2 , donc le point C correspond au liquide saturant et le point D à la vapeur saturante puisque l'eau subit une vaporisation totale.

Pour représenter le point E , la transformation est isentropique. En lisant la question 3), nous remarquons que le point E est constitué d'un mélange de liquide et de gaz à la pression P_1 et à la température T_1 .

Il faut penser à flécher le sens du parcours du cycle.



2) Le liquide subit une transformation isotherme. Donc pour la transformation AB , nous intégrons l'expression précédente de A à B :

$$S_B - S_A = mc_{liq} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right).$$

Comme la température finale est égale à la température initiale, nous obtenons alors :

$$S_B - S_A = 0.$$

Ensuite la transformation BC est une transformation isobare du liquide qui passe de la température T_1 à la température T_2 .

Nous avons donc en utilisant la formule donnée :

$$S_C - S_B = mc_{liq} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

Pour la transformation de C à D le liquide subit une vaporisation totale à la température T_2 . La variation d'entropie est donnée par la formule suivante :

$$S_D - S_C = m \frac{L_{\text{vaporisation}}}{T_2}$$

avec ici :

$$L_{\text{vaporisation}} = h_g(T_2) - h_l(T_2).$$

Ainsi, nous en déduisons :

$$S_D - S_C = m \frac{h_g(T_2) - h_l(T_2)}{T_2}.$$

La transformation DE est isentropique, donc nous avons immédiatement :

$$S_E - S_D = 0.$$

3) Nous allons maintenant déterminer la fraction massique de vapeur au point E . Pour cela, nous utilisons le fait que l'eau décrit un cycle et donc pour un cycle :

$$\Delta S = 0.$$

Nous calculons la variation d'entropie pour aller de E à A .

Une masse m d'eau est liquéfiée.

En utilisant la définition de la variation d'entropie, nous avons :

$$S_A - S_E = -m \frac{L_{\text{vaporisation}}(T_1)}{T_1}$$

donc :

$$S_A - S_E = m \frac{(h_l(T_1) - h_g(T_1))}{T_1}.$$

Maintenant reste à reprendre les différentes expressions des variations d'entropie calculées pour le cycle :

$$(S_B - S_A) + (S_C - S_B) + (S_D - S_C) + (S_E - S_D) + (S_A - S_E) = 0.$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$0 + mc_{liq} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + m \frac{h_g(T_2) - h_l(T_2)}{T_2} + 0 + m \frac{(h_l(T_1) - h_g(T_1))}{T_1} = 0.$$

Reste maintenant à sortir x :

$$x = - \frac{mc_{liq} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + m \frac{h_g(T_2) - h_l(T_2)}{T_2}}{m \frac{(h_l(T_1) - h_g(T_1))}{T_1}}.$$

Il faut maintenant simplifier l'expression par m et nous trouvons alors :

$$x = - \frac{c_{liq} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{h_g(T_2) - h_l(T_2)}{T_2}}{\frac{(h_l(T_1) - h_g(T_1))}{T_1}}.$$

Nous pouvons alors procéder à l'application numérique. Nous pouvons laisser les grandeurs en kJ puisqu'elles interviennent sous forme d'une fraction :

$$x = - \frac{4,18 \ln \left(\frac{378,15}{338,15} \right) + \frac{2683,7 - 440,17}{378,15}}{\frac{(272,02 - 2618,4)}{338,15}}$$

donc :

$$x = 0,92.$$

4) Pour la transformation BCD , le calcul se fait en deux temps.

Pour l'échauffement du liquide, nous avons :

$$\delta Q_{rév} = m c_{liq} dT.$$

Il reste donc à intégrer l'expression de la température T_1 à la température T_2 . Nous obtenons alors :

$$Q_{BC} = m c_{liq} (T_2 - T_1).$$

Pour la vaporisation totale, il faut utiliser la définition de la chaleur latente de vaporisation, et nous obtenons :

$$Q_{CD} = m L_{vaporisation}(T_2) = m (h_g(T_2) - h_l(T_2)).$$

Donc pour la transformation BCD :

$$Q_{BCD} = m c_{liq} (T_2 - T_1) + m (h_g(T_2) - h_l(T_2)).$$

Nous procédons maintenant à l'application numérique :

$$\frac{Q_{BCD}}{m} = 4,18 \cdot 10^3 (378,15 - 338,15) + (2683,7 - 440,17) 10^3$$

$$\frac{Q_{BCD}}{m} = 2410,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Pour la transformation de E à A , il y a une liquéfaction de la masse m de vapeur. Donc le transfert thermique reçu par le système est :

$$Q_{EA} = -m L_{vaporisation}(T_1).$$

En remplaçant $L_{vaporisation}(T_1)$, nous obtenons :

$$Q_{EA} = mx \left(h_l(T_1) - h_g(T_1) \right).$$

Nous passons maintenant à l'application numérique :

$$\frac{Q_{EA}}{m} = 0,92 \times (272,02 - 2618,4) 10^3$$

$$\frac{Q_{EA}}{m} = -2158,7 \text{ kJ kg}^{-1}.$$

5) Nous pouvons maintenant déterminer le rendement de ce moteur.

Le rendement r est égal au rapport gain sur pertes.

Le gain correspond au travail fourni.

Les pertes correspondent à la quantité de chaleur lors de la transformation BCD .
Ainsi :

$$r = -\frac{W}{Q_{BCD}}.$$

Or, nous obtenons le travail en appliquant le premier principe de la thermodynamique à l'eau pour un cycle.

$$\Delta U = W + Q_{BCD} + Q_{EA} = 0$$

donc :

$$W = -Q_{BCD} - Q_{EA}.$$

Et finalement le rendement vaut :

$$r = -\frac{W}{Q_{BCD}} = \frac{Q_{BCD} + Q_{EA}}{Q_{BCD}}.$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$r = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BCD}}.$$

Nous passons maintenant à l'application numérique :

$$r = 1 + \frac{-2158,7}{2410,7}.$$

D'où la valeur du rendement :

$$r = 0,1.$$

Le rendement est vraiment très faible.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir du diagramme de Clapeyron pour un corps pur avec changement d'état.

Rapport du jury 2006

Les changements d'état du corps pur sont mal assimilés (le simple tracé d'une isotherme en diagramme de Clapeyron pour une température inférieure à la température critique traduit souvent la grande méconnaissance du sujet). Le tracé des cycles devient très hasardeux.

♡ Il faut se souvenir de l'expression du rendement d'un moteur.

Rapport du jury 2006

Les mêmes erreurs se retrouvent chaque année. Elles concernent essentiellement les machines thermiques (les définitions de rendement et d'efficacité sont en général erronées et conduisent le plus souvent à des rendements de 100%).

Rapport du jury 2015

Les définitions des coefficients d'efficacité des machines thermiques ne sont pas toujours bien connues de tous les candidats.

Formulaire

- Variation d'entropie pour un liquide :

$$S = mc_{liq} \ln T + Cte.$$

- Variation d'entropie pour un changement d'état à la température T :

$$S_{gaz} - S_{liquide} = m \frac{L_{vaporisation}}{T}.$$

- Rendement pour un moteur :

$$\rho = \frac{GAIN}{DEPENSES} = \frac{-W}{Q_{chaude}}.$$

- Premier principe de la thermodynamique :

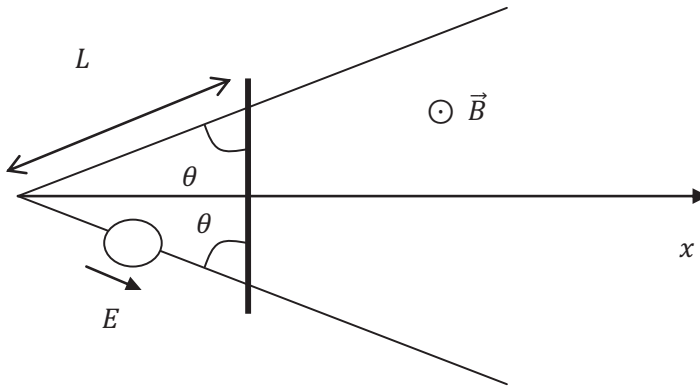
$$\Delta(U + E_c + E_p) = W + Q.$$

- Deuxième principe de la thermodynamique :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} ;$$

avec, pour une transformation monotherme :

$$S_{\text{échangée}} = \frac{Q}{T_{\text{ext}}}.$$

Énoncé

On considère deux rails conducteurs formant un V. Un générateur de fem E est inséré dans le circuit sur le rail inférieur. Une tige de longueur L et de masse m est posée sur ces deux rails. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan des rails. On note λ la résistance linéique des rails et de la tige.

À l'instant initial, la tige est immobile et se trouve à la distance L du point d'intersection des deux rails (voir schéma). On néglige les frottements de la tige sur les rails et l'auto-induction.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable x . Donner les conditions qui permettraient de déterminer la vitesse de la tige lorsque cette dernière quitte les rails.

Analyse stratégique de l'énoncé

Nous avons ici un exercice d'induction qui ressemble aux rails de Laplace. Cette exercice est très peu guidé. Il faut utiliser les résultats du cours obtenus pour les rails de Laplace et les appliquer aux rails en V.

↪ Penser à faire un schéma en orientant le circuit et en plaçant le vecteur surface.

La longueur du circuit varie en fonction de la position de la tige et donc la résistance va varier aussi.

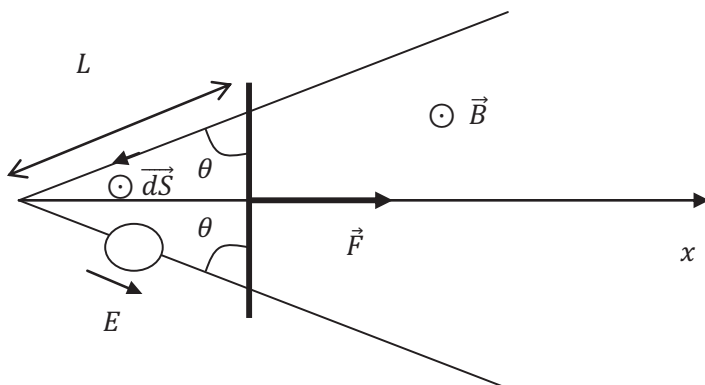
↪ Utiliser la variable x pour établir les équations.

Comme dans tout exercice d'induction, il faut déterminer une équation électrique et une équation mécanique.

↪ Utiliser la loi de Faraday afin de trouver la fem induite et d'établir l'équation électrique.

↪ Penser à faire le bilan des forces et appliquer la deuxième loi de Newton à la tige.

Corrigé



Nous avons affaire à un phénomène d'induction magnétique. Commençons par analyser le problème. Le générateur crée un courant dans le circuit. Comme la tige est parcourue par un courant et qu'elle est placée dans un champ magnétique, elle est soumise à la force de Laplace. La tige peut donc se déplacer vers la droite. Comme elle se déplace, le flux du champ magnétique à travers le circuit varie et donc nous avons apparition d'une fem induite. Lorsque la tige se déplace, la longueur du circuit est modifiée et donc la résistance totale est aussi modifiée.

Il faut donc penser à paramétrer la position de la tige en fonction de x .

Dans sa position initiale, la tige se trouve en :

$$x_0 = L \sin \theta.$$

Dans une position x quelconque, la longueur du rail vaut :

$$L' = \frac{x}{\sin \theta}.$$

La longueur de la tige entre les deux rails vaut :

$$d = \frac{2x}{\tan \theta}.$$

La longueur du circuit est donc en fonction de x :

$$L_{tot} = 2L' + d = \frac{2x}{\sin \theta} + \frac{2x}{\tan \theta}.$$

La résistance du circuit pour une position quelconque est :

$$R(x) = \lambda \left(\frac{2x}{\sin \theta} + \frac{2x}{\tan \theta} \right).$$

Calculons maintenant le flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\phi = \iint B \cdot dS$$

$$\phi = BS.$$

La surface du circuit est égale à l'aire des deux triangles soit :

$$S = x \frac{d}{2}$$

$$S = x \frac{x}{\tan \theta}.$$

Le flux vaut donc :

$$\phi = B \frac{x^2}{\tan \theta}.$$

La fem induite est donnée par la loi de Faraday soit :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$e = - \frac{2Bx\dot{x}}{\tan \theta}.$$

L'équation électrique est donc pour la maille comprenant un générateur, une fem et une résistance :

$$E + e = R(x)i$$

$$\boxed{E - \frac{2Bx\dot{x}}{\tan \theta} = 2\lambda x \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right) i.}$$

La force de Laplace est définie par :

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F} = idB\vec{e}_x.$$

Maintenant, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton à la tige. Elle est soumise à la force de Laplace, au poids et aux réactions de rails. Les deux dernières forces se compensent.

Il reste donc en projection sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = F_{lap} = idB.$$

L'équation mécanique est donc en fonction de la vitesse :

$$m\dot{v} = iB \frac{2x}{\tan \theta}.$$

Pour obtenir l'équation vérifiée par la variable x , il suffit de remplacer i en fonction de x :

$$m\ddot{x} = B \frac{2x}{\tan \theta} \left(E - \frac{2Bx\dot{x}}{\tan \theta} \right) \frac{1}{2\lambda x \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right)}$$

$$m\ddot{x} = B \left(E - \frac{2Bx\dot{x}}{\tan \theta} \right) \frac{1}{\lambda \left(\frac{\tan \theta}{\sin \theta} + 1 \right)}$$

$$m\ddot{x} = B \left(E - \frac{2Bx\dot{x}}{\tan \theta} \right) \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{\cos \theta} + 1 \right)}.$$

En intégrant une fois par rapport au temps entre l'instant initial où la vitesse est nulle et l'instant t , nous obtenons :

$$m\dot{x} = \frac{BE \cos \theta}{\lambda(\cos \theta + 1)} t - \frac{B^2(x^2 - x_0^2) \cos \theta}{\lambda(\cos \theta + 1) \tan \theta}.$$

Lorsque la tige quitte les rails, la distance d est égale à L soit la position finale :

$$x_f = \frac{L}{2} \tan \theta.$$

La vitesse de la tige lorsqu'elle quitte le rail est donc :

$$v_f = \frac{BE \cos \theta}{\lambda m(\cos \theta + 1)} t - \frac{B^2 \left(\frac{L^2}{4} \tan^2 \theta - L^2 \sin^2 \theta \right)}{\lambda m(\cos \theta + 1) \tan \theta} \cos \theta.$$

Pour trouver la réponse, il faudrait pouvoir intégrer l'équation différentielle afin de trouver $x(t)$ et en déduire l'instant qui vérifie $x(t) = L \tan \theta$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'il est très utile de pratiquer une analyse physique du sujet en définissant sa démarche pour les sujets ouverts.

Rapport du jury 2015

Pour un sujet de type résolution de problème, l'objectif à atteindre sera clairement donné et le travail du candidat portera sur la démarche à suivre, l'obtention du résultat et son regard critique. Le candidat devra mobiliser ses connaissances, capacités et compétences afin d'aborder une situation dans laquelle il doit atteindre un but bien précis, mais pour laquelle le chemin à suivre n'est pas indiqué.

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de faire des schémas et d'y indiquer les grandeurs pertinentes.

Rapport du jury 2015

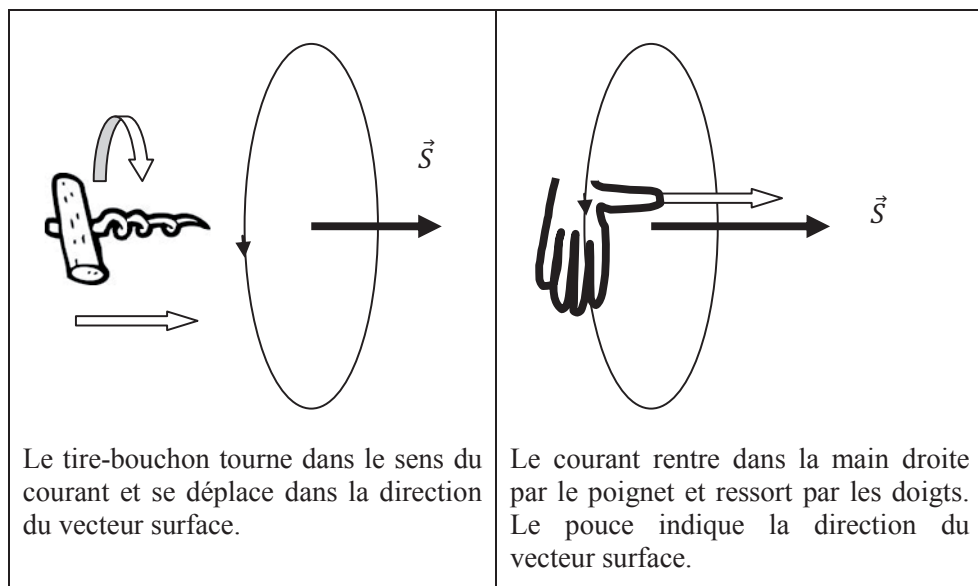
Faire un schéma qui n'est pas seulement un résumé de l'énoncé : y faire apparaître les symboles mathématiques des grandeurs pertinentes et les mentionner à l'oral.

Formulaire

- Force de Laplace :

$$\vec{F}_{lap} = i\vec{L} \wedge \vec{B}.$$

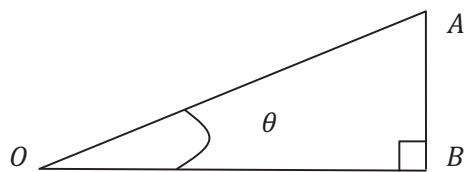
- Lien entre l'orientation du contour et le vecteur surface : L'orientation du contour fermé et la normale à la surface sont liées. Pour trouver l'orientation de la surface à partir de l'orientation du contour, il suffit de prendre la règle du tire-bouchon ou de la main droite.



- Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}.$$

- Relations trigonométriques dans un triangle rectangle :



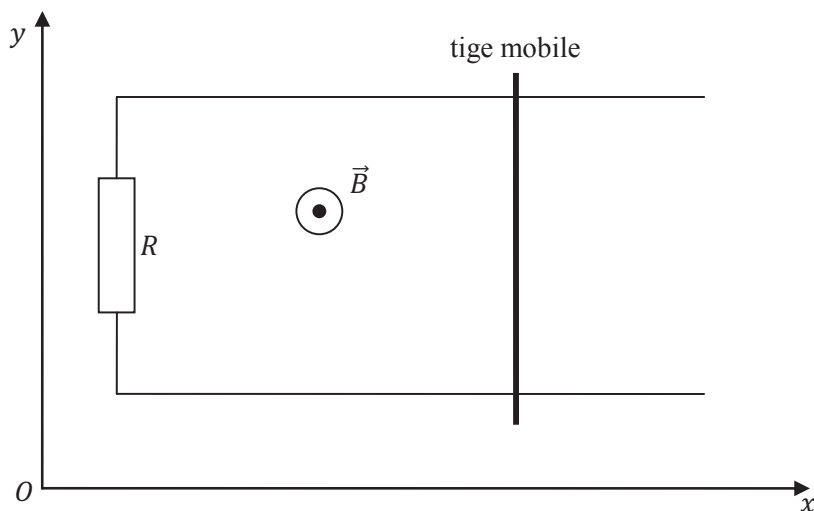
$$\sin \theta = \frac{AB}{OA} ; \cos \theta = \frac{OB}{OA} ; \tan \theta = \frac{AB}{OB}.$$

Jour n°10

Exercice 10.1

1) En général, quelles sont les causes du phénomène d'induction ? Comment peut-on écrire de façon mathématique ce phénomène ?

On étudie maintenant les phénomènes d'induction dans le dispositif ci-dessous.



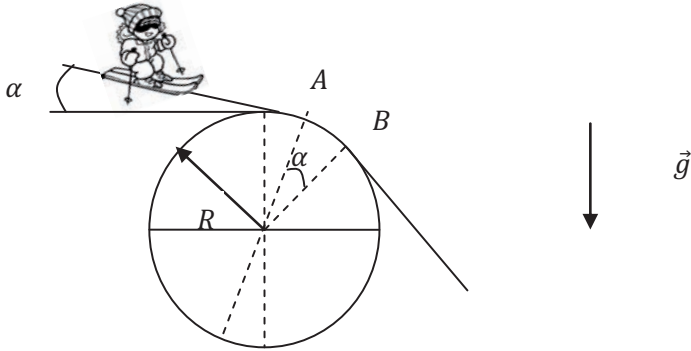
Une tige de longueur a se déplace sans frottement sur deux rails de Laplace distants de a . La résistance des rails et de la tige est négligeable devant la résistance R . L'axe Oy se trouve dans le plan horizontal et l'axe Ox fait un angle α avec l'horizontale. Le système est placé dans le champ de pesanteur.

On applique à la tige une force $\vec{F} = F\vec{x}$ de norme constante telle que la tige se déplace suivant la direction x croissante.

- 2) Comment peut-on prévoir, sans calcul, le sens du courant induit ?
- 3) Déterminer la fem induite ainsi que la force de Laplace exercée sur la tige.
- 4) Déterminer les équations mécanique et électrique pour le système.
- 5) En déduire la vitesse de la tige ainsi que le courant circulant dans le circuit sachant qu'à l'instant initial la tige est immobile.

Exercice 10.2

Un skieur de masse m glisse sans frottement sur une pente faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale et associée à un arc de cercle de rayon $R = 10$ m. Il arrive au point A avec une vitesse V_0 .

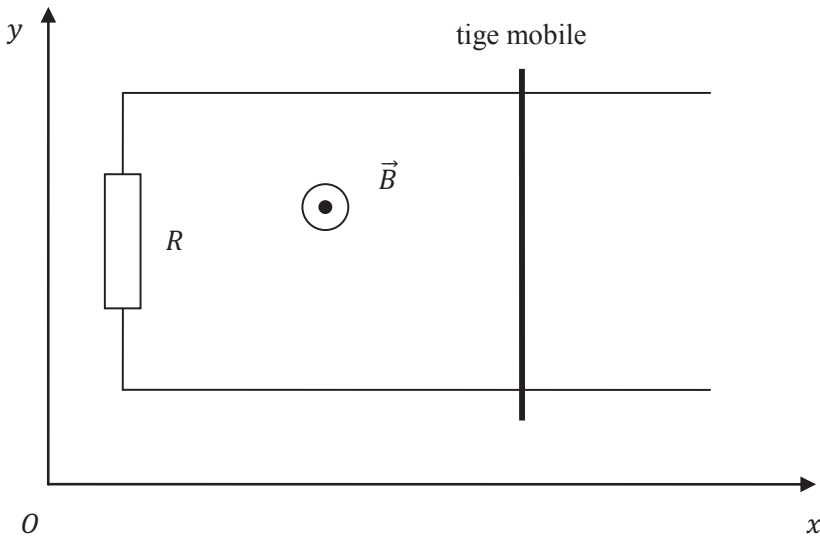


- 1) Déterminer les équations du mouvement dans le système de coordonnées polaires.
- 2) Déterminer la norme de la réaction du support et déterminer la vitesse maximale du skieur pour qu'il ne décolle pas entre les points A et B .

Énoncé

1) En général, quelles sont les causes du phénomène d'induction ? Comment peut-on écrire de façon mathématique ce phénomène ?

On étudie maintenant les phénomènes d'induction dans le dispositif ci-dessous.



Une tige de longueur a se déplace sans frottement sur deux rails de Laplace distants de a . La résistance des rails et de la tige est négligeable devant la résistance R . L'axe Oy se trouve dans le plan horizontal et l'axe Ox fait un angle α avec l'horizontale. Le système est placé dans le champ de pesanteur.

On applique à la tige une force $\vec{F} = F\vec{x}$ de norme constante telle que la tige se déplace suivant la direction x croissante.

- 2) Comment peut-on prévoir, sans calcul, le sens du courant induit ?
- 3) Déterminer la fem induite ainsi que la force de Laplace exercée sur la tige.
- 4) Déterminer les équations mécanique et électrique pour le système.
- 5) En déduire la vitesse de la tige ainsi que le courant circulant dans le circuit sachant qu'à l'instant initial la tige est immobile.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice classique sur l'induction électromagnétique, au programme de première année.

- 1) Il s'agit d'une question de cours sans aucune difficulté.

↪ Décrire les deux phénomènes d'induction et donner la loi de Faraday pour un circuit filiforme.

2) Dans cette question, il faut faire une analyse du phénomène sans faire de calcul et utiliser la loi de Lenz.

↪ Cette question servira à vérifier vos résultats pour la question 5).

3) Penser déjà à orienter le circuit avant de commencer les calculs. Maintenant, on peut calculer la fem induite par la loi de Faraday ou par la circulation du champ électromoteur. Le calcul de la force de Laplace est sans difficulté.

↪ Question relativement simple et rapide. Attention toutefois aux signes.

4) Pour l'équation électrique, aucune difficulté, il suffit d'appliquer la loi d'Ohm généralisée. Pour l'équation mécanique, on commence par définir le système, on fait le bilan des actions mécaniques subies.

↪ Ne pas oublier le poids car le système est incliné.

5) Reste maintenant à découpler les équations précédentes et à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

↪ Faire bien attention aux conditions initiales.

Corrigé

1) Le phénomène d'induction est dû à une variation du flux du champ magnétique à travers un circuit. On distingue deux cas.

○ L'induction de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétostatique.

○ L'induction de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Maintenant les deux peuvent se produire en même temps, le circuit peut être mobile dans un champ magnétique variable.

Les phénomènes d'inductions sont caractérisés par la fem induite :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}.$$

La traduction mathématique de ce phénomène est la relation de Maxwell-Faraday qui sera vue en deuxième année :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

À partir de cette relation, on trouve la loi de Faraday pour un circuit filiforme :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$e = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$e = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

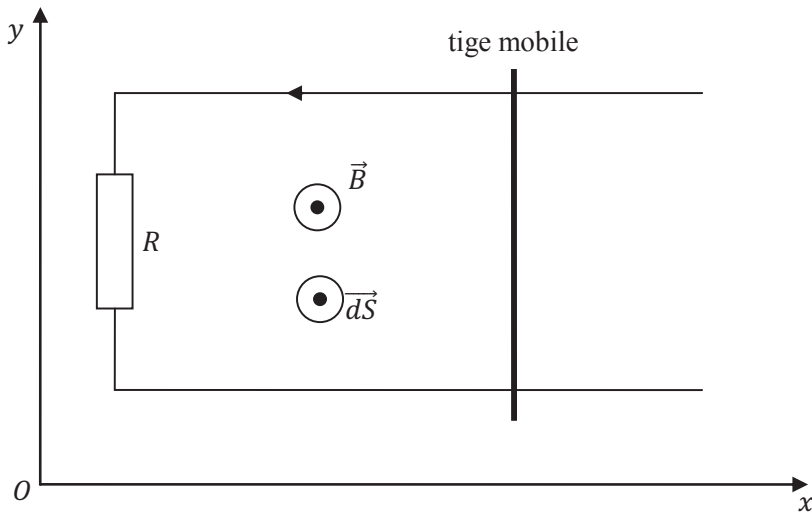
$$e = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Et finalement, on arrive à :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

2) On demande de faire un raisonnement qualitatif.

On commence déjà par analyser le phénomène général avant de répondre à la question. Ici la tige se déplace dans le sens des x croissants dans un champ magnétostatique. On a donc un phénomène d'induction de Lorentz qui crée une fem induite. Cette fem est à l'origine du courant induit dans le circuit. La tige, qui est donc parcourue par un courant, sera alors soumise à la force de Laplace (conducteur parcouru par un courant placé dans un champ magnétique). Avant de commencer, il faut déjà orienter le circuit.



La tige se déplace dans le sens des x croissants. D'après la loi de Lenz, la force de Laplace qui agit sur le circuit va s'opposer au mouvement de la tige. Donc le courant sera négatif avec l'orientation choisie.

Autre méthode

Le flux du champ magnétique est positif et croissant, donc d'après la loi de Lenz, le courant doit circuler pour s'opposer à l'augmentation du champ magnétique. Le courant est négatif de façon à créer un champ magnétique opposé à celui existant (on utilise la loi du tire-bouchon : on tourne dans le sens du courant et la direction du tire-bouchon donne le sens du champ magnétique propre).

3) Déterminons de la fem induite par la loi de Faraday.

On commence par calculer le flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

En tenant compte de l'orientation du circuit, on trouve :

$$\phi = Bax$$

donc :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{x}.$$

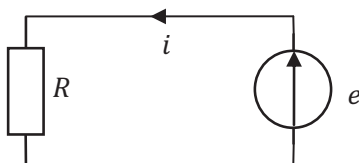
Pour déterminer la force de Laplace, on utilise son expression :

$$\vec{F}_l = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

On trouve alors :

$$\boxed{\vec{F}_l = iaB\vec{x}.$$

4) L'équation électrique est relativement simple à trouver puisque l'on a uniquement une fem induite et une résistance. On obtient le circuit électrique équivalent :

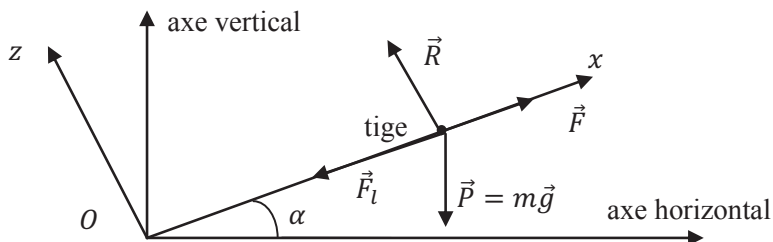


Il suffit donc d'écrire l'équation de maille : $e = Ri$.

En remplaçant avec les valeurs, on trouve l'équation électrique :

$$\boxed{-Ba\dot{x} = Ri.}$$

Maintenant, on va chercher l'équation mécanique. On détermine le système : la tige. On travaille dans le référentiel galiléen lié au laboratoire. Les forces exercées sur la tige sont : le poids, la force $\vec{F}$, les forces de réactions de la tige sur le support, la force de Laplace. On peut refaire un schéma de profil pour bien visualiser le poids.



On applique la deuxième loi de Newton à la tige :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_l.$$

On projette sur l'axe Ox et on obtient l'équation mécanique :

$$\boxed{m\ddot{x} = F - mg \sin \alpha + iaB.}$$

5) On cherche maintenant l'équation vérifiée par la vitesse $v = \dot{x}$. De l'équation électrique, on sort le courant i :

$$i = -\frac{Ba\dot{x}}{R} = -\frac{Bav}{R}.$$

Reste alors à remplacer dans l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha - \frac{Bav}{R} aB.$$

On peut alors simplifier l'équation :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR} v = \frac{F - mg \sin \alpha}{m}.$$

On a donc une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Penser à vérifier l'homogénéité.

La solution est de la forme :

$$v = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}}.$$

On détermine la constante A à l'aide des conditions initiales :

À $t = 0$, la vitesse v est nulle :

$$v(t = 0) = 0 = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A.$$

Donc :

$$A = -\frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha).$$

On trouve alors la vitesse :

$$v(t) = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Pour avoir un mouvement selon les x croissants, il faut que :

$$F - mg \sin \alpha > 0.$$

On peut maintenant déterminer le courant i :

$$i = -\frac{Bav}{R}.$$

En remplaçant l'expression de v et en simplifiant, on trouve :

$$i = -\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba} \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Remarque :

La force est homogène à iaB . Donc le terme $\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba}$ est bien homogène à un courant.

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir du fait que la loi de Lenz est un principe de modération, ce qui permet de contrôler ses résultats.

Rapport du jury 2007

Le candidat doit toujours avoir un regard critique sur les résultats obtenus.

♥ Il faut se souvenir qu'il faut orienter le circuit afin d'éviter les erreurs de signe.

Rapport du jury 2006

En induction électromagnétique, les questions d'orientation restent le gros point noir, ce qui conduit à de nombreuses erreurs de signe dans les équations électriques. La rigueur dans les questions d'orientation des circuits est pourtant essentielle pour mener à terme un exercice portant sur les phénomènes d'induction.

Rapport du jury 2015

Les questions d'orientation demeurent en induction. Il faut orienter le contour et la surface de manière cohérente.

♥ Il faut se souvenir de faire une étude qualitative afin de mieux comprendre le phénomène et de ne pas oublier de termes dans les différentes équations.

Rapport du jury 2010

En induction électromagnétique, l'étude qualitative des phénomènes est généralement incomplète, d'où les oublis des forces de Laplace dans les équations mécaniques ou de fem d'induction dans les équations électriques.

♡ Il faut se souvenir de faire un schéma électrique équivalent et de faire le schéma en représentant les différentes forces.

Rapport du jury 2010

Les schémas sont toujours utiles et constituent une bonne base de travail. Pour éviter des erreurs de signe ultérieures, il est cependant important de garder à l'esprit que les grandeurs géométriques (angles, coordonnées) doivent être, autant que possible, positives sur le schéma.

♡ Il faut se souvenir de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Formulaire

- Loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

- L'équation de Maxwell-Faraday :

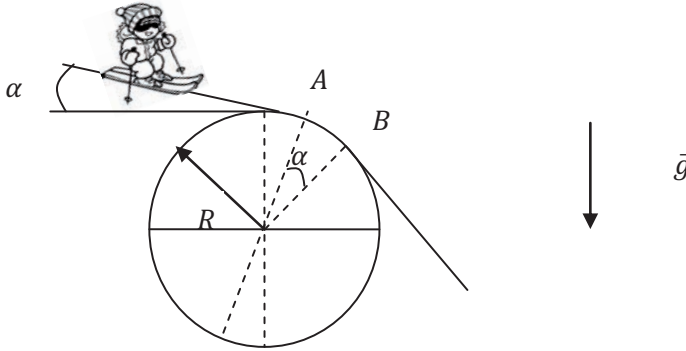
$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

- La force de Laplace :

$$\vec{F}_l = \int i \vec{dl} \wedge \vec{B}.$$

Énoncé

Un skieur de masse m glisse sans frottement sur une pente faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale et associée à un arc de cercle de rayon $R = 10$ m. Il arrive au point A avec une vitesse V_0 .



- 1) Déterminer les équations du mouvement dans le système de coordonnées polaires.
- 2) Déterminer la norme de la réaction du support et déterminer la vitesse maximale du skieur pour qu'il ne décolle pas entre les points A et B.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de mécanique du point.

- 1) Il faut dans un premier temps définir le référentiel d'étude. Ensuite, il faut bien définir le système. Il faut faire le bilan des forces.

↪ Penser à utiliser le système de coordonnées le mieux adapté pour décrire un mouvement circulaire.

- 2) Cette question utilise les résultats précédents.

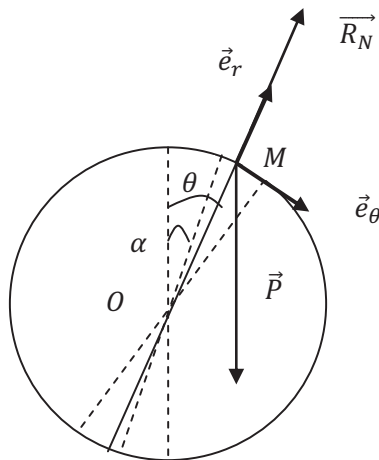
↪ Penser à intégrer une des deux équations.

Corrigé

- 1) Le référentiel d'étude est le référentiel galiléen lié au sol. Le système est constitué par le skieur qui est assimilé à une masse ponctuelle.

Le système de coordonnées le mieux adapté à la situation est bien entendu le système de coordonnées polaires.

Nous le représentons sur un schéma.



Le vecteur position est donc :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

La vitesse est donc :

$$\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

L'accélération est :

$$\vec{a}(M) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Le skieur est soumis au poids et à la réaction de la piste. La deuxième loi de Newton s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N.$$

Le poids projeté dans le système des coordonnées polaires donne :

$$\vec{P} = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

La réaction de la piste est suivant $\vec{e}_r$.

La projection sur $\vec{e}_r$ donne :

$$\boxed{-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg \cos \theta .}$$

La projection sur $\vec{e}_\theta$ donne :

$$\boxed{mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta .}$$

2) La réaction du sol est donnée par la première équation soit :

$$R_N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2.$$

Il faut donc déterminer $\dot{\theta}^2$.

Pour cela, il suffit d'intégrer la deuxième équation en la multipliant par $\dot{\theta}$.

$$mR\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\dot{\theta} \sin \theta.$$

Nous avons donc en intégrant entre l'instant initial où $v = R\dot{\theta}(t=0) = V_0$ et $\theta(t=0) = \alpha$:

$$\frac{1}{2}R\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} = -g \cos \theta + g \cos \alpha.$$

Nous avons donc :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{V_0^2}{R} - 2g \cos \theta + 2g \cos \alpha.$$

En remplaçant dans l'expression de la réaction, nous avons :

$$R_N = mg \cos \theta - m \left(\frac{V_0^2}{R} - 2g \cos \theta + 2g \cos \alpha \right)$$

$$R_N = 3mg \cos \theta - m \frac{V_0^2}{R} - 2mg \cos \alpha.$$

Pour que le skieur ne décolle pas entre les points A et B , il faut que la réaction du sol soit toujours positive soit :

$$R_N = 3mg \cos \theta - m \frac{V_0^2}{R} - 2mg \cos \alpha > 0$$

$$3g \cos \theta - 2g \cos \alpha > \frac{V_0^2}{R}.$$

Il faut déjà s'assurer que la vitesse est bien définie soit :

$$3g \cos \theta - 2g \cos \alpha > 0$$

$$\cos \theta > \frac{2 \cos \alpha}{3} = \frac{2 \cos 20}{3} = 0,67$$

$$\theta < 48^\circ.$$

L'angle θ varie de α à 2α . Il est inférieur à 40° . Nous sommes donc dans le cas où la vitesse est définie. Donc il faut prendre la valeur minimale du $\cos \theta$, c'est-à-dire $\cos 2\alpha$.

Nous avons donc :

$$V_0 < \sqrt{R(3g \cos \theta - 2g \cos \alpha)}$$

$$V_{0max} = \sqrt{R(3g \cos 2\alpha - 2g \cos \alpha)}.$$

L'application numérique donne :

$$V_{0max} = \sqrt{10(3 \times 9,8 \times \cos 40^\circ - 2 \times 9,8 \times \cos 20^\circ)}$$

$$V_{0max} = 6,4 \text{ m.s}^{-1} = 6,4 \times 3,6 = 23 \text{ km.h}^{-1}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de définir correctement le référentiel d'étude ainsi que le système et

Rapport du jury 2015

L'importance des définitions du système et du référentiel n'est pas toujours bien comprise.

♡ Il faut se souvenir de faire des schémas clairs.

♡ Il faut se souvenir de faire un bilan des forces sans oublier la réaction de contact.

Rapport du jury 2015

Dans les exercices avec contact, beaucoup de candidats oublient la réaction du support.

♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les forces.

Rapport du jury 2015

Comme le rappelle le programme : « l'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie ». De manière non exhaustive, le jury a relevé les mêmes insuffisances que l'an passé : sur la trigonométrie (formule d'addition et de duplication des cosinus et sinus, angle orienté et lien avec les axes de rotation), l'analyse vectorielle (expression en coordonnées cartésiennes des différents opérateurs, difficultés avec le laplacien d'un champ de vecteurs), en géométrie (projection d'un vecteur, interprétation géométrique du produit scalaire et du produit vectoriel)....

Formulaire

- Position, vitesse et accélération pour un mouvement circulaire en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

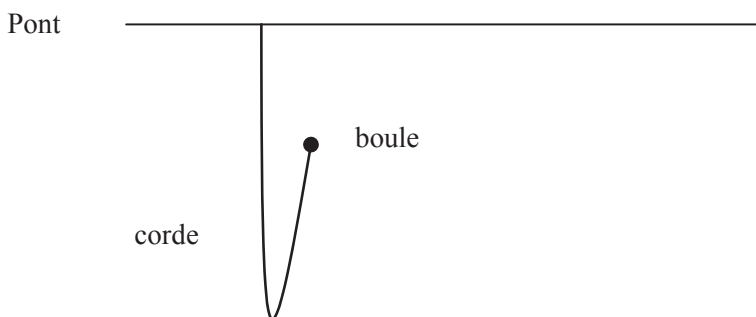
$$\vec{a}(M) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

- Condition de contact avec le sol : la réaction normale du sol sur le système est strictement positive.
- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

Exercice 11.1

On considère un système constitué d'une corde inextensible et d'une boule. La corde, de masse linéique μ , de longueur totale L , est attachée à un pont par une de ses extrémités. La boule, de masse m , supposée ponctuelle, est sur le pont et est attachée à l'autre extrémité de la corde. La corde pend dans le « vide » et remonte jusqu'à la boule. La hauteur du pont est supérieure à la longueur de la corde.



L'origine de l'énergie potentielle est prise nulle lorsque la boule se trouve sur le pont.

À l'instant initial $t = 0$, on pousse la boule qui tombe du pont sans vitesse initiale.

- 1) Déterminer l'énergie mécanique du système à $t = 0$.
- 2) Montrer que l'énergie potentielle du système constitué par la corde et la boule peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = A\mu g(2zL - z^2) + Bz.$$

- 3) Que faut-il supposer pour que le système soit conservatif ?
- 4) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de la boule en fonction de μ , g , z , L et m .
- 5) Calculer sa vitesse lorsqu'elle arrive en $z = L$. Étudier le cas limite $\mu = 0$.

Exercice 11.2

On considère un filtre dont la fonction de transfert est la suivante :

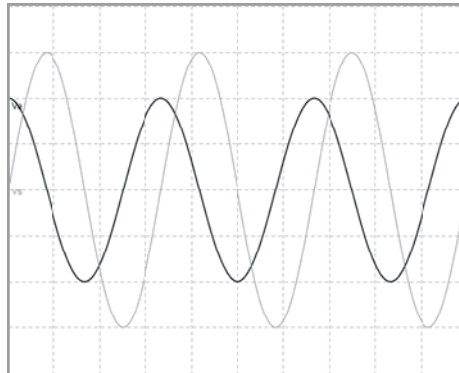
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

- 1) Quelle est la nature du filtre ? Tracer le diagramme de Bode en gain puis en phase.
- 2) Déterminer H_0 , ω_0 et Q en utilisant l'oscillogramme donné. La tension d'entrée est en foncé et la tension de sortie est en plus clair. En régime continu, le filtre donne une tension de sortie égale à la tension d'entrée.

oscillogramme

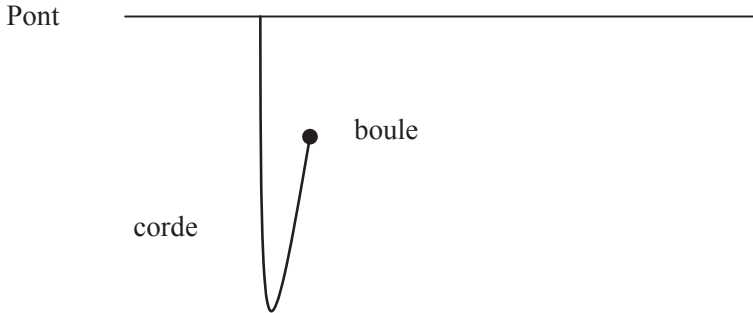
$X : 1 \text{ carreau} = 1 \text{ ms}$

$Y : 1 \text{ carreau} = 1 \text{ V}$



Énoncé

On considère un système constitué d'une corde inextensible et d'une boule. La corde, de masse linéique μ , de longueur totale L , est attachée à un pont par une de ses extrémités. La boule, de masse m , supposée ponctuelle, est sur le pont et est attachée à l'autre extrémité de la corde. La corde pend dans le « vide » et remonte jusqu'à la boule. La hauteur du pont est supérieure à la longueur de la corde.



L'origine de l'énergie potentielle est prise nulle lorsque la boule se trouve sur le pont.

À l'instant initial $t = 0$, on pousse la boule qui tombe du pont sans vitesse initiale.

- 1) Déterminer l'énergie mécanique du système à $t = 0$.
- 2) Montrer que l'énergie potentielle du système constitué par la corde et la boule peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = A\mu g(2zL - z^2) + Bz.$$

- 3) Que faut-il supposer pour que le système soit conservatif ?
- 4) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de la boule en fonction de μ , g , z , L et m .
- 5) Calculer sa vitesse lorsqu'elle arrive en $z = L$. Étudier le cas limite $\mu = 0$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice portant sur le programme de mécanique et principalement sur l'énergie mécanique d'un système.

- 1) Cette première question est assez simple.

↪ Il faut se rappeler de la définition de l'énergie mécanique.

- 2) Il s'agit de déterminer l'énergie potentielle de pesanteur d'un morceau de corde.

↪ Penser à déterminer le centre d'inertie ou le centre de masse.

Pour trouver l'énergie potentielle du système à un instant quelconque, il faut déterminer la variation d'énergie potentielle entre l'instant initial et l'instant final.

↪ Cette question délicate demande beaucoup de rigueur.

3) Cette question est simple.

↪ Il est possible de répondre à cette question même si la précédente n'est pas traitée. Se souvenir de la définition d'un système conservatif.

4) Il s'agit d'utiliser un théorème de cours.

↪ Pas de difficulté pour cette question.

5) Cette question est une application de la question précédente pour une position de la boule. Le cas limite de la masse linéique nulle permet de contrôler son résultat.

↪ Se souvenir de la vitesse d'une masse ponctuelle en chute libre.

Corrigé

1) L'énergie mécanique est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle soit :

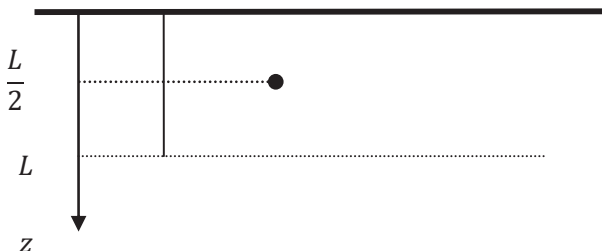
$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p.$$

Comme le système est initialement au repos, son énergie cinétique est nulle. L'énoncé indique aussi que l'énergie potentielle du système est nulle. L'énergie mécanique du système est donc initialement nulle :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = 0.}$$

2) Avant de répondre à la question, démontrons que l'énergie potentielle de pesanteur d'une corde de longueur L est égale à l'énergie potentielle d'une masse ponctuelle μz placée au centre d'inertie en $\frac{L}{2}$.

Nous avons donc le schéma suivant :



L'énergie potentielle de la masse m placée en $\frac{L}{2}$ vaut :

$$\mathcal{E}_p = -mg \frac{L}{2} + cte.$$

Pour simplifier nous pouvons prendre la constante nulle soit :

$$\mathcal{E}_p = -mg \frac{L}{2} = -\mu g \frac{L^2}{2}.$$

Nous pouvons retrouver cette expression par une autre méthode. L'énergie potentielle de la masse $dm = \mu dz$ placée à l'abscisse z vaut :

$$d\mathcal{E}_p = -dmgz.$$

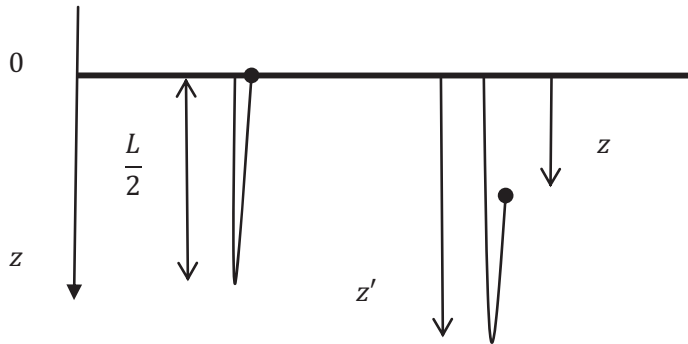
Pour avoir l'énergie potentielle totale, il faut intégrer sur la longueur de la corde.

Nous avons donc :

$$\mathcal{E}_p = - \int_0^L \mu dzgz = -\mu g \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^L = -\mu g \frac{L^2}{2}.$$

Nous avons donc bien les deux mêmes expressions.

Nous pouvons revenir à l'exercice dans lequel il s'agit de déterminer la variation d'énergie potentielle du système entre l'instant initial et l'instant t . Pour cela nous faisons un schéma :



Nous pouvons considérer que le morceau de corde de longueur z passe de l'abscisse $\frac{z}{2}$ à l'instant initial à l'abscisse $\frac{L}{2} + \frac{z}{4}$ à l'instant t .

La variation d'énergie potentielle de la corde est donc :

$$\Delta\mathcal{E}_p = \mu g \frac{z^2}{2} - \mu g z \left(\frac{L}{2} + \frac{z}{4} \right).$$

L'énergie potentielle du système boule et corde à l'instant où la boule se trouve en z vaut :

$$\mathcal{E}_p = -mgz + \mu g \frac{z^2}{2} - \mu g z \left(\frac{L}{2} + \frac{z}{4} \right)$$

$$\mathcal{E}_p = -mgz - \frac{\mu g}{4}(2Lz - z^2).$$

Nous trouvons bien une expression du type :

$$\mathcal{E}_p = A\mu g(2zL - z^2) + Bz.$$

Nous pouvons identifier les coefficients :

$$A = -\frac{1}{4}; B = -mg.$$

3) Afin d'avoir un système conservatif, il ne faut aucun frottement de l'air.

4) Nous faisons l'hypothèse d'un système conservatif pour lequel l'énergie mécanique est conservée.

Nous avons donc en négligeant l'énergie cinétique de la corde :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgz - \frac{\mu g}{4}(2Lz - z^2).$$

$$v^2 = 2gz + \frac{\mu g}{2m}(2Lz - z^2)$$

$$v = \sqrt{2gz + \frac{\mu g}{2m}(2Lz - z^2)}.$$

5) Lorsque la boule arrive en $z = L$, nous avons donc la vitesse qui vaut :

$$v = \sqrt{2gL + \frac{\mu g}{2m}(2LL - L^2)}$$

$$v = \sqrt{2gL + \frac{\mu g}{2m}L^2}.$$

Lorsque la masse linéique de la corde est nulle cette vitesse tend vers :

$$v(\mu = 0) = \sqrt{2gL}.$$

Cette vitesse correspond à la vitesse de chute libre comme si la boule n'était pas attachée.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que l'énergie mécanique se conserve pour un système conservatif.

Rapport du jury 2015

Les candidats ne pensent jamais à se poser la question de la conservation de l'énergie mécanique pour un système à un degré de liberté. Le théorème de l'énergie mécanique n'est pas connu comme une variante du théorème de l'énergie cinétique. En conséquence, quand une force n'est pas clairement identifiée comme non conservative, le candidat se demande s'il faut la comptabiliser dans le TEM.

♡ Il faut se souvenir de l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

Rapport du jury 2015

Les candidats doivent connaître sans hésitation l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel, suivant que l'axe vertical est ascendant ou descendant.

Formulaire

- Énergie cinétique d'une masse ponctuelle :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

- Énergie potentielle de pesanteur d'une masse ponctuelle avec un axe vertical ascendant :

$$\mathcal{E}_p = mgz + cte.$$

- Énergie potentielle de pesanteur d'une masse ponctuelle avec un axe vertical descendant :

$$\mathcal{E}_p = -mgz + cte.$$

- Énergie potentielle de pesanteur d'une corde de longueur L de masse linéique μ avec un axe vertical descendant :

$$\mathcal{E}_p = -\mu g \frac{L^2}{2}.$$

- Énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p.$$

Énoncé

On considère un filtre dont la fonction de transfert est la suivante :

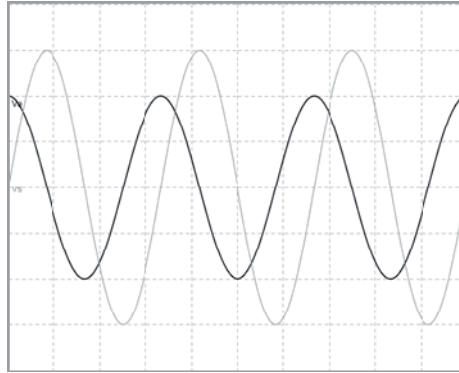
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}$$

- 1) Quelle est la nature du filtre ? Tracer le diagramme de Bode en gain puis en phase.
- 2) Déterminer H_0 , ω_0 et Q en utilisant l'oscillogramme donné. La tension d'entrée est en foncé et la tension de sortie est en plus clair. En régime continu, le filtre donne une tension de sortie égale à la tension d'entrée.

oscillogramme

$X : 1 \text{ carreau} = 1 \text{ ms}$

$Y : 1 \text{ carreau} = 1 \text{ V}$

**Analyse stratégique de l'énoncé**

Il s'agit d'un exercice d'électrocinétique portant sur les filtres.

- 1) Cette première question consiste à déterminer les limites afin de trouver la nature du filtre et ensuite il s'agit de tracer le diagramme de Bode en amplitude et en phase. Il faut aussi déterminer si le filtre est actif ou passif.

↪ On cherche les asymptotes en basse fréquence et en haute fréquence.

- 2) Dans cette question, il faut lire l'oscillogramme et l'énoncé afin de déterminer les trois inconnues.

↪ Il faut donc trouver trois équations.

Corrigé

1) On cherche à déterminer la nature du filtre. En observant l'oscillogramme, on constate que la tension de sortie est supérieure à la tension d'entrée.

On a donc un filtre actif.

On étudie le comportement en basse fréquence.

La fonction de transfert devient égale à :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0.$$

L'asymptote est donc :

$$g_{dB} = 20 \log H_0.$$

La phase est donc nulle en basse fréquence.

En haute fréquence, la pulsation tend vers l'infini et la fonction de transfert tend vers 0 et elle est équivalente à :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}.$$

L'asymptote est donc égale à :

$$g_{dB} = 20 \log H_0 - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

La phase vaut $\varphi = -\pi$ ou $\varphi = \pi$. Il faudra la déterminer en fonction du sens de variation de la phase.

Le filtre laisse passer les basses fréquences mais pas les hautes fréquences.

Pour la pulsation $\omega = \omega_0$, on a la fonction de transfert qui est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{jQ} = -j \frac{H_0}{Q}.$$

Le module est donc égal à :

$$|H| = \frac{H_0}{Q}.$$

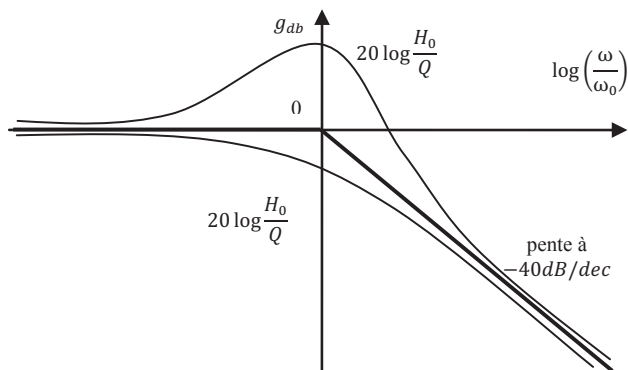
La phase vaut donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Comme la phase est une fonction continue, elle vaut 0 en basse fréquence et passe par $-\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$.

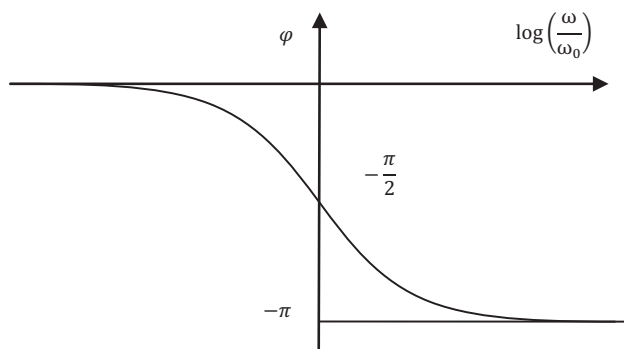
Nous pouvons dire que la phase est égale à $-\pi$ en très haute fréquence.

On a donc affaire à un filtre passe-bas ou passe-bande suivant la valeur du coefficient Q .

Le diagramme de Bode est donc le suivant :



Le diagramme de Bode pour la phase est donc le suivant :



2) On remarque que l'oscillogramme est donné pour $\omega = \omega_0$ car la phase vaut donc $-\frac{\pi}{2}$. On peut donc en déduire que :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

On lit la période sur l'oscillogramme et on trouve 3,2 carreaux. On en déduit que la période vaut $T = 3,5$ ms. La pulsation ω_0 est donc égale à :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{3,2 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 1963 \text{ rad. s}^{-1}.}$$

Le module de la fonction de transfert vaut :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(Q \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En basse fréquence, on a donc $|\underline{H}(j\omega)| = H_0$.

L'énoncé indique qu'en régime continu la tension de sortie est égale à la tension d'entrée donc la fonction de transfert en continu est égale à 1. On a donc :

$$\boxed{H_0 = 1.}$$

Pour le coefficient Q , on lit sur l'oscillogramme que l'amplitude de la tension de sortie est de 3 carreaux et celle de la tension d'entrée est de 2 carreaux.

On a donc :

$$|H| = \frac{H_0}{Q} = \frac{3}{2}.$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{Q = \frac{2}{3}.$$

On a donc affaire à un filtre passe-bande.

On peut chercher le maximum qui est donné pour le minimum de la fonction suivante $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(Q \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ soit :

$$\frac{d\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(Q \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{d\omega} = 0$$

$$-2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \frac{2\omega}{\omega_0^2} + 2Q^2 \frac{\omega}{\omega_0^2} = 0.$$

En simplifiant, il reste :

$$\omega \left(-2 + \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} + Q^2\right) = 0.$$

Les solutions sont donc :

$$\omega = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{Q^2}{2}\right).$$

La deuxième équation a une solution si $Q < \sqrt{2}$.

Pour $Q \geq \sqrt{2}$, on a donc le filtre passe-bas avec un maximum d'amplitude pour $\omega = 0$.

Pour $Q < \sqrt{2}$, on a donc un maximum d'amplitude pour :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{Q^2}{2}}.$$

Ce maximum vaut :

$$H_{max} = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - 1 + \frac{Q^2}{2}\right)^2 + Q^2 \left(1 - \frac{Q^2}{2}\right)}}$$

$$H_{max} = \frac{H_0}{\sqrt{\frac{Q^4}{4} + Q^2 - \frac{Q^4}{2}}}$$

$$H_{max} = \frac{H_0}{\sqrt{Q^2 - \frac{Q^4}{4}}}$$

L'application numérique donne :

$$H_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4}} = 1,59.$$

Ce résultat est donc cohérent avec les données.

Les fréquences de coupure sont définies par :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1,59}{\sqrt{2}} = 1,12.$$

On a donc bien un filtre passe-bande.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la détermination des asymptotes et de la phase à partir de la fonction de transfert complexe.

Rapport du jury 2014

La notation complexe pose curieusement de plus en plus de problèmes aux candidats et des exercices considérés comme basiques sont en réalité source de difficultés.

♡ Il faut se souvenir de la définition du diagramme de Bode qui contient deux graphes : le gain et la phase.

Rapport du jury 2009

Quelques difficultés apparaissent lors de l'étude de circuits en régime sinusoïdal forcé.
Lors du tracé du diagramme de Bode, le diagramme de phase est rarement abordé.

♡ Il faut se souvenir de faire l'étude de la phase grâce l'étude asymptotique de la fonction de transfert.

Rapport du jury 2009

Quand l'étude de la phase est malgré tout menée, elle l'est de façon maladroite, à π près, à partir de $\tan \varphi$. L'étude asymptotique, menée directement à partir de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$, pourrait être plus efficace.

♡ Il faut se souvenir de lire correctement un oscillogramme.

Rapport du jury 2015

Les exploitations de courbes n'ont pas été traitées de manière satisfaisante. Un effort doit être porté sur cet aspect.

Formulaire

- Gain en décibel :

$$g_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|.$$

- Phase :

$$\varphi = \arg \underline{H}(j\omega).$$

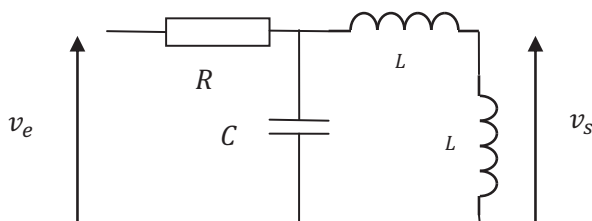
- Pulsation de coupure ω_c :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \text{ ou } g_{dB}(\omega_c) = g_{max} - 3 \text{ dB}.$$

Jour n°12

Exercice 12.1

On étudie le filtre suivant :



1) Déterminer la fonction de transfert du filtre et ses grandeurs caractéristiques. Quelle est la nature du filtre ?

2) On alimente le filtre avec un signal crêteaux impair de fréquence $f = 1678$ Hz. Déterminer la forme du signal de sortie.

Données :

$$R = 9,5 \text{ k}\Omega ; L = 1 \text{ mH} ; C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}.$$

Rappel :

Le signal crêteaux se met sous la forme suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$a_0 = 0 ; a_n = 0 ; b_n = \frac{2E}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Exercice 12.2

On sait que lorsqu'un glaçon est plongé dans un verre d'eau liquide, l'eau liquide refroidit.

On dispose une masse m_1 d'eau liquide à la température T_1 et d'une masse de glace m_2 à la température T_2 .

Déterminer le rapport minimal $\frac{m_2}{m_1}$ afin que toute l'eau liquide se transforme en glace.

Déterminer le rapport maximal $\frac{m_2}{m_1}$ qui permet d'obtenir uniquement du liquide.

Cette transformation est-elle facile à réaliser ? Pourquoi ?

Données :

Enthalpie massique de fusion de l'eau : $L_f = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Capacité thermique de l'eau liquide : $c_l = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

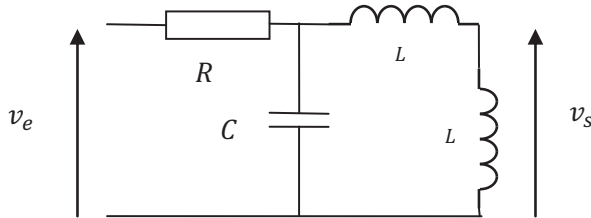
Capacité thermique de l'eau solide : $c_s = 2000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Température de l'eau liquide : $T_1 = 300 \text{ K}$.

Température de l'eau solide : $T_2 = 253 \text{ K}$.

Énoncé

On étudie le filtre suivant :



1) Déterminer la fonction de transfert du filtre et ses grandeurs caractéristiques. Quelle est la nature du filtre ?

2) On alimente le filtre avec un signal crêteaux impair de fréquence $f = 1678 \text{ Hz}$. Déterminer la forme du signal de sortie.

Données :

$$R = 9,5 \text{ k}\Omega ; L = 1 \text{ mH} ; C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}.$$

Rappel :

Le signal crêteaux se met sous la forme suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$a_0 = 0 ; a_n = 0 ; b_n = \frac{2E}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'électrocinétique et principalement d'un filtre.

1) Il faut dans un premier temps déterminer la fonction de transfert du filtre et donner sa nature.

↪ Utiliser les lois des nœuds et des mailles ou le diviseur de tension.

↪ Penser à déterminer les comportements haute et basse fréquences sans faire de calculs.

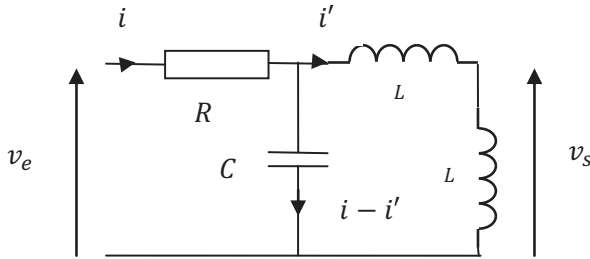
2) Un signal crêteaux se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. Seules les fréquences contenues dans la bande passante sont transmises.

↪ Calculer l'amplitude des signaux transmis ainsi que leur phase.

Corrigé

1) Dans cette première méthode, nous allons utiliser la loi des mailles. Nous appliquons directement la loi des nœuds sur le schéma.

Nous avons donc le circuit suivant :



La tension d'entrée est donnée par :

$$v_e = Ri + \frac{i - i'}{jC\omega}.$$

La tension de sortie est donnée par :

$$v_s = jL\omega i'.$$

Il nous faut maintenant une relation entre les courants. En prenant la maille fermée, nous obtenons :

$$\frac{i - i'}{jC\omega} = 2jL\omega i'.$$

Nous en déduisons i' en fonction de i soit :

$$\begin{aligned} \frac{i}{jC\omega} &= \left(2jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) i' \\ i' &= \frac{i}{jC\omega \left(2jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)} \\ i' &= \frac{i}{1 - 2LC\omega^2}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} v_e &= Ri + \frac{i}{jC\omega} - \frac{i}{jC\omega} \frac{1}{1 - 2LC\omega^2} \\ v_s &= jL\omega \frac{i}{1 - 2LC\omega^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la fonction de transfert en faisant le rapport des deux termes soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{jL\omega \frac{i}{1 - 2LC\omega^2}}{Ri + \frac{i}{jC\omega} - \frac{i}{jC\omega} \frac{1}{1 - 2LC\omega^2}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega \frac{1}{1-2LC\omega^2}}{R + \frac{1}{jC\omega} - \frac{1}{jC\omega} \frac{1}{1-2LC\omega^2}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)(1-2LC\omega^2) - \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{(jRC\omega + 1)(1-2LC\omega^2) - 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{-j\frac{R}{L\omega} + 2jRC\omega + 2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{2L\omega}\right)}.$$

Nous avons donc une fonction de transfert qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Nous avons donc affaire à un filtre passe-bande.
Le gain maximal est donc :

$$H_{max} = H_0 = \frac{1}{2}.$$

Nous pouvons identifier la pulsation correspondant au gain maximum et le facteur de qualité par :

$$\frac{Q}{\omega_0} = RC$$

$$Q\omega_0 = \frac{R}{2L}.$$

La résolution donne :

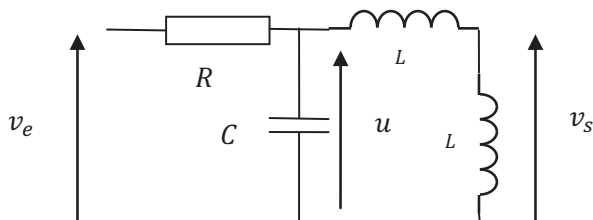
$$Q^2 = \frac{R^2C}{2L}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R^2C}{2L}}$$

$$\omega_0 = \frac{R}{2L} \sqrt{\frac{2L}{R^2C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Nous pouvons retrouver ce résultat en utilisant le diviseur de tension.

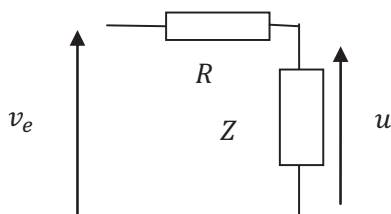


Nous avons :

$$\frac{v_s}{u} = \frac{jL\omega}{2jL\omega} = \frac{1}{2}.$$

Il faut ensuite déterminer la résistance équivalente à C en parallèle avec $2L$ soit :

$$\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{2jL\omega}.$$



En utilisant le diviseur de tension

$$\begin{aligned} \frac{u}{v_e} &= \frac{Z}{R + Z} \\ \frac{u}{v_e} &= \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}} \\ \frac{u}{v_e} &= \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{2jL\omega} \right)}. \end{aligned}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{v_s}{v_e} \frac{u}{u} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{2jL\omega} \right)}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien la même fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j \left(RC\omega - \frac{R}{2L\omega} \right)}.$$

À vous de prendre la méthode qui vous convient le mieux.

Les applications numériques donnent :

$$Q = \sqrt{\frac{(9,5 \cdot 10^3)^2 \times 0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}}} = 150,2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 0,5 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 31622 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$\boxed{f_0 = 5033 \text{ Hz.}}$$

2) Le filtre est alimenté avec un signal créneaux impair de fréquence $f = 1678 \text{ Hz}$. Ce signal périodique est décomposable en série de Fourier dont la fréquence du fondamental est $f_0 = f$.

Les harmoniques vont avoir les fréquences suivantes :

$$2f = 3356 \text{ Hz} ; 3f = 5034 \text{ Hz} ; 4f = 6712 \text{ Hz} \dots$$

Les amplitudes sont :

$$b_1 = \frac{4E}{\pi}$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = \frac{4E}{3\pi}$$

$$b_4 = 0$$

$$b_5 = \frac{4E}{5\pi}.$$

Le signal d'entrée s'écrit donc :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4E}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4E}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots$$

Comme le filtre est très sélectif, seule la troisième harmonique va passer. Elle correspond au maximum de la fonction de transfert lorsque le déphasage est nul. En sortie, nous aurons uniquement :

$$v_s = H_0 \frac{4E}{3\pi} \sin(3\omega t)$$

$$v_s = \frac{2E}{3\pi} \sin(3\omega t).$$

Nous pouvons calculer l'amplitude du fondamental qui correspond à $\omega = \frac{\omega_0}{3}$.

Nous avons donc :

$$\underline{H}\left(j\frac{\omega_0}{3}\right) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{1}{3} - 3\right)}$$

$$\underline{H}\left(j\frac{\omega_0}{3}\right) = \frac{H_0}{1 - jQ\left(\frac{8}{3}\right)}.$$

Nous calculons le module :

$$\begin{aligned} \left| \underline{H} \left(j \frac{\omega_0}{3} \right) \right| &= \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(Q \left(\frac{8}{3} \right) \right)^2}} \\ \left| \underline{H} \left(j \frac{\omega_0}{3} \right) \right| &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(150,2 \times \left(\frac{8}{3} \right) \right)^2}} \\ \left| \underline{H} \left(j \frac{\omega_0}{3} \right) \right| &= 0,0025. \end{aligned}$$

L'amplitude du terme de pulsation $\omega = \frac{5\omega_0}{3}$ vaut donc :

$$\begin{aligned} \underline{H} \left(j \frac{5\omega_0}{3} \right) &= \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5} \right)} \\ \underline{H} \left(j \frac{5\omega_0}{3} \right) &= \frac{H_0}{1 - jQ \left(\frac{16}{15} \right)}. \end{aligned}$$

Le module est donc égal à :

$$\begin{aligned} \left| \underline{H} \left(j \frac{5\omega_0}{3} \right) \right| &= \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(Q \left(\frac{16}{15} \right) \right)^2}} \\ \left| \underline{H} \left(j \frac{5\omega_0}{3} \right) \right| &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(150,2 \times \left(\frac{16}{15} \right) \right)^2}} \\ \left| \underline{H} \left(j \frac{5\omega_0}{3} \right) \right| &= 0,0031. \end{aligned}$$

Ces deux valeurs du gain sont donc faibles et les fréquences sont bien atténuées.
En sortie nous avons donc un signal sinusoïdal de fréquence $3f = f_0$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que la fonction de transfert ne fonctionne que pour un signal sinusoïdal.

Rapport du jury 2017

La fonction de transfert est parfois utilisée pour relier des amplitudes de signaux non sinusoïdaux (créneau/triangle dans un intégrateur).

♡ Il faut se souvenir de la forme canonique du filtre passe-bande d'ordre 2 et de la signification du facteur de qualité.

Rapport du jury 2017

La valeur du facteur de qualité est mal interprétée et peu de candidats savent par exemple que, pour $Q > 4$, celui-ci est de l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations d'une réponse indicielle ou la valeur du gain maximal en régime sinusoïdal forcé.

Formulaire

- Impédance du résistor (ou résistance) :

$$Z_R = R.$$

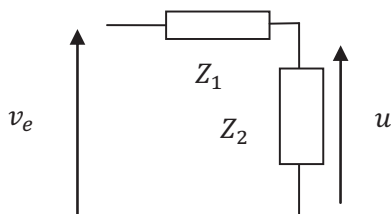
- Impédance de la bobine :

$$Z_L = jL\omega.$$

- Impédance du condensateur :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Diviseur de tension :



$$\frac{u}{v_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e}.$$

- Fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bande du deuxième ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Énoncé

On sait que lorsqu'un glaçon est plongé dans un verre d'eau liquide, l'eau liquide refroidit.

On dispose une masse m_1 d'eau liquide à la température T_1 et d'une masse de glace m_2 à la température T_2 .

Déterminer le rapport minimal $\frac{m_2}{m_1}$ afin que toute l'eau liquide se transforme en glace.

Déterminer le rapport maximal $\frac{m_2}{m_1}$ qui permet d'obtenir uniquement du liquide.

Cette transformation est-elle facile à réaliser ? Pourquoi ?

Données :

Enthalpie massique de fusion de l'eau : $L_f = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Capacité thermique de l'eau liquide : $c_l = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Capacité thermique de l'eau solide : $c_s = 2000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Température de l'eau liquide : $T_1 = 300 \text{ K}$.

Température de l'eau solide : $T_2 = 253 \text{ K}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de thermodynamique non guidé.

Il faut imaginer que l'expérience se passe à l'intérieur d'un calorimètre afin de supposer que la transformation est adiabatique.

↪ Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système qui aura été défini au préalable.

Ensuite, il faut discuter sur les conditions de réalisation de cette expérience.

↪ Bien se rappeler des travaux pratiques.

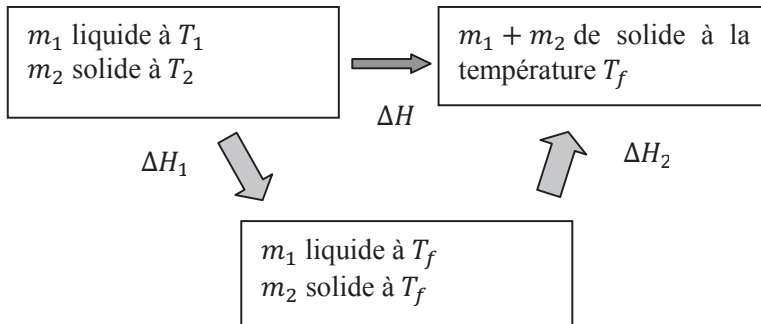
Corrigé

L'état initial est constitué par la masse m_1 de liquide à la température T_1 et la masse m_2 de solide à la température T_2 .

L'état final doit être constitué de la masse $m_1 + m_2$ de solide à la température T_f .

C'est la condition pour avoir la valeur maximale de l'eau liquide qui pourra se transformer en solide. La température finale sera alors égale à la température de fusion et il ne restera plus de liquide.

Nous allons donc faire un tableau et passer par un état intermédiaire afin de faciliter les calculs.



Nous imaginons un chemin qui passe par un état intermédiaire dans lequel le liquide et le solide sont amenés à la température de fusion T_f .

Pour la transformation globale, la variation d'enthalpie est nulle car la transformation est adiabatique.

Nous avons donc :

$$\Delta H = 0.$$

Pour la première transformation fictive, nous avons pour les changements de température des deux corps :

$$\Delta H_1 = m_1 c_l (T_f - T_1) + m_2 c_s (T_f - T_2).$$

Pour la deuxième transformation fictive, nous avons pour le changement d'état du liquide :

$$\Delta H_2 = -m_1 L_f.$$

Attention à bien penser à mettre un signe négatif car il s'agit de la solidification.

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \Delta H = 0 &= \Delta H_1 + \Delta H_2 \\ m_1 c_l (T_f - T_1) + m_2 c_s (T_f - T_2) - m_1 L_f &= 0 \\ -m_1 c_l (T_f - T_1) + m_1 L_f &= m_2 c_s (T_f - T_2). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le rapport des masses :

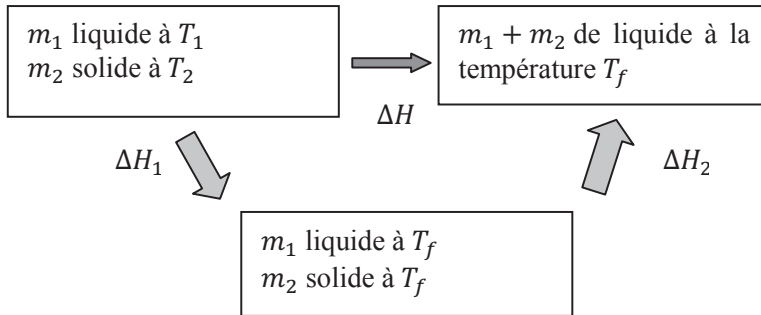
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{L_f - c_l (T_f - T_1)}{c_s (T_f - T_2)}.$$

L'application numérique donne :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{330 \cdot 10^3 - 4200(273 - 300)}{2000(273 - 252)}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 5,49.$$

Si nous cherchons à transformer tout le solide en liquide, nous avons donc le schéma suivant :



Nous imaginons un chemin qui passe par un état intermédiaire dans lequel le liquide et le solide sont amenés à la température de fusion T_f .

Pour la transformation globale, la variation d'enthalpie est nulle car la transformation est adiabatique.

Nous avons donc :

$$\Delta H = 0.$$

Pour la première transformation fictive, nous avons pour les changements de température des deux corps :

$$\Delta H_1 = m_1 c_l (T_f - T_1) + m_2 c_s (T_f - T_2).$$

Pour la deuxième transformation fictive, nous avons pour le changement d'état du solide :

$$\Delta H_2 = m_2 L_f.$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \Delta H = 0 &= \Delta H_1 + \Delta H_2 \\ m_1 c_l (T_f - T_1) + m_2 c_s (T_f - T_2) + m_2 L_f &= 0 \\ -m_1 c_l (T_f - T_1) &= m_2 L_f + m_2 c_s (T_f - T_2). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le rapport des masses :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{-c_l(T_f - T_1)}{c_s(T_f - T_2) + L_f}.$$

L'application numérique donne :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{-4200(273 - 300)}{2000(273 - 252) + 330 \cdot 10^3}$$
$$\frac{m_2}{m_1} = 0,3.$$

Donc si le rapport des masses est supérieur à 5,49, l'eau sera à l'état solide à une température inférieure à 273 K.

Si le rapport des masses est compris entre 0,3 et 5,49, l'état final du système sera constitué d'un mélange d'eau liquide et solide à la température de 273 K.

Si le rapport des masses est inférieur à 0,3, l'état final du système sera de l'eau liquide à une température supérieure à 273 K.

Les manipulations sont assez simples à faire mais la précision des mesures reste assez mauvaise. Il est assez difficile d'obtenir des glaçons dont la température est uniforme. Lors des manipulations, il est difficile d'éviter les transferts thermiques.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de bien définir le système thermodynamique étudié.

Rapport du jury 2017

Le premier principe s'applique à un système qu'il faut définir entre deux instants qu'il convient de préciser.

Rapport du jury 2016

L'application des principes de la thermodynamique suppose au préalable la définition du système et la précision de l'état initial et de l'état final de la transformation étudiée. Il faut savoir écrire l'énergie interne ou l'entropie d'un système inhomogène.

♡ Il faut se souvenir de toujours travailler avec des fonctions d'état.

♡ Il faut se souvenir de penser à faire des schémas.

Rapport du jury 2016

Il faut systématiquement penser à faire un schéma (et en situation) pour avoir une vue claire des notations et autres grandeurs, paramétrage... Il ne faut pas se jeter sur un exercice qui ressemble à un autre : réfléchir avant pour ne pas perdre de temps sur une mauvaise piste. Il ne faut pas bâcler le travail qualitatif au départ : beaucoup de candidats disent « je fais l'analyse physique » mais ne font rien de valable scientifiquement ; il faut produire un raisonnement étayé à partir des lois.

Formulaire

- Variation d'enthalpie pour une transformation isobare :

$$\Delta H = Q .$$

- Variation d'enthalpie pour une transformation adiabatique et isobare :

$$\Delta H = 0 .$$

- Variation d'enthalpie pour une phase condensée :

$$\Delta H = mc\Delta T .$$

- Variation d'enthalpie pour un changement d'état :

$$\Delta H_{1\rightarrow 2} = mL_{1\rightarrow 2} .$$

Jour n°13

Exercice 13.1

On considère un gaz parfait diatomique qui est contenu dans un cylindre fermé par un piston sans masse. Le gaz se trouve à la pression $P_0 = 1$ bar, à la température $T_0 = 300$ K et son volume vaut $V_0 = 10$ L.

Le piston et le cylindre sont parfaitement calorifugés. Un opérateur comprime très lentement le gaz en appuyant sur le piston jusqu'à ce que le volume du gaz soit égal à 70% de son volume initial.

1) Déterminer la température finale et la pression finale ainsi que le travail exercé par l'opérateur.

En réalité, la température finale est plus faible.

Pour améliorer le modèle, on considère désormais que le piston reste parfaitement calorifugé mais que le cylindre n'est plus calorifugé que sur sa partie externe. Dans ce cas, il existe donc des échanges thermiques entre le gaz et la paroi.

On note C la capacité thermique du cylindre.

2) Déterminer la température finale et la pression finale avec ce nouveau modèle sachant que l'opérateur fournit le même travail que précédemment.

3) On trouve $T_f = 318$ K. En déduire la valeur de la capacité thermique du cylindre.

Exercice 13.2

On considère un objet AB tel que $\overline{AB} = 1$ cm et situé à 10 cm devant une lentille convergente de distance focale 5 cm.

1) Déterminer la nature, le sens, la grandeur, la position de l'image créée.

2) Retrouver ces informations par un schéma.

3) Tracer le trajet d'un rayon faisant un angle quelconque avec l'axe optique.

4) Si l'on approche l'objet de 1 cm de la lentille que se passe-t-il ?

5) Reprendre les deux premières questions pour un objet situé à 3 cm avant la lentille et ensuite 10 cm après la lentille.

On donne la relation de conjugaison d'une lentille mince :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Énoncé

On considère un gaz parfait diatomique qui est contenu dans un cylindre fermé par un piston sans masse. Le gaz se trouve à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$, à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ et son volume vaut $V_0 = 10 \text{ L}$.

Le piston et le cylindre sont parfaitement calorifugés. Un opérateur comprime très lentement le gaz en appuyant sur le piston jusqu'à ce que le volume du gaz soit égal à 70% de son volume initial.

1) Déterminer la température finale et la pression finale ainsi que le travail exercé par l'opérateur.

En réalité, la température finale est plus faible.

Pour améliorer le modèle, on considère désormais que le piston reste parfaitement calorifugé mais que le cylindre n'est plus calorifugé que sur sa partie externe. Dans ce cas, il existe donc des échanges thermiques entre le gaz et la paroi.

On note C la capacité thermique du cylindre.

2) Déterminer la température finale et la pression finale avec ce nouveau modèle sachant que l'opérateur fournit le même travail que précédemment.

3) On trouve $T_f = 318 \text{ K}$. En déduire la valeur de la capacité thermique du cylindre.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice portant sur la thermodynamique.

1) Il faut déterminer le système et identifier la transformation subie. La transformation est adiabatique et réversible car très lente.

↪ Appliquer les lois de Laplace pour la transformation adiabatique réversible.

2) Bien faire attention au système étudié. Le gaz ne subit plus une transformation adiabatique réversible. Nous ne pouvons plus utiliser la loi de Laplace.

↪ Appliquer le premier principe au système que vous aurez pris soin de définir.

3) Aucune difficulté pour cette question qui est simplement une application numérique.

↪ Attention aux unités.

Corrigé

1) Le système thermodynamique étudié est le gaz parfait contenu dans l'enceinte.

Il subit une transformation adiabatique que l'on peut aussi supposer réversible car la transformation est lente.

Nous sommes donc dans le cas d'application de la loi de Laplace soit :

$$PV^\gamma = Cte.$$

Nous avons donc entre l'état initial et l'état final :

$$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma$$

$$P_f = P_i \frac{V_i^\gamma}{V_f^\gamma}.$$

L'application numérique donne :

$$P_f = 10^5 \times \left(\frac{10}{7}\right)^{1,4} = 1,65 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

La température est donnée par la loi des gaz parfaits soit :

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

$$T_f = T_i \frac{P_f V_f}{P_i V_i}$$

$$T_f = T_i \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{1-\gamma}.$$

L'application numérique donne :

$$T_f = 300 \left(\frac{7}{10}\right)^{-0,4} = 346 \text{ K.}$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au gaz nous avons :

$$\Delta U = W + Q = W.$$

Pour un gaz parfait la variation d'énergie interne vaut :

$$\Delta U = n c_V (T_f - T_i) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}.$$

Nous en déduisons le travail :

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}.$$

L'application numérique donne :

$$W = \frac{1,65 \cdot 10^5 \times 7 \cdot 10^{-3} - 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{1,4 - 1} = 387,5 \text{ J.}$$

2) Il faut maintenant tenir compte du fait que le cylindre n'est plus adiabatique et les transferts thermiques avec le gaz sont présents.

Nous noterons T_f' et P_f' les température et pression finales du gaz.

Pour le gaz parfait nous avons la relation suivante :

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P'_f V_f}{T'_f}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique au système constitué par le gaz et le cylindre. Comme l'énergie interne est extensive nous avons donc :

$$\Delta U = \Delta U_{gaz} + \Delta U_{cylindre} = nc_V(T'_f - T_i) + C(T'_f - T_i).$$

Nous pouvons en déduire le travail reçu par le système :

$$W = (nc_V + C)(T'_f - T_i)$$

$$W = \left(\frac{nR}{\gamma - 1} + C \right) (T'_f - T_i)$$

$$W = \left(\frac{P_i V_i}{(\gamma - 1)T_i} + C \right) (T'_f - T_i).$$

Dans l'énoncé, nous faisons l'hypothèse que le travail reçu par le système est inchangé nous avons donc :

$$\left(\frac{P_i V_i}{(\gamma - 1)T_i} + C \right) (T'_f - T_i) = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} = \frac{P_i \frac{V_i^\gamma}{V_f^\gamma} V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}.$$

Nous pouvons en déduire la température finale :

$$T'_f = T_i + \frac{P_i \frac{V_i^\gamma}{V_f^\gamma} V_f - P_i V_i}{(\gamma - 1) \left(\frac{P_i V_i}{(\gamma - 1)T_i} + C \right)}.$$

La pression finale est donc :

$$P'_f = P_i \frac{V_i T'_f}{V_f T_i}.$$

3) Nous pouvons calculer la pression finale qui est :

$$P'_f = P_i \frac{V_i T'_f}{V_f T_i}$$

$$P'_f = 10^5 \times \frac{10}{7} \times \frac{318}{300}$$

$$P'_f = 1,51 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

La capacité thermique du cylindre est donc égale à :

$$W = (nc_V + C)(T'_f - T_i)$$

$$C = \frac{W}{T_f' - T_i} - nc_V$$

$$C = \frac{W}{T_f' - T_i} - \frac{P_i V_i}{(\gamma - 1)T_i}.$$

L'application numérique donne :

$$C = \frac{387,5}{318 - 300} - \frac{10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{(1,4 - 1) \times 300}$$

$$\boxed{C = 13,19 \text{ J.K}^{-1}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de définir le système thermodynamique.

Rapport du jury 2016

Le domaine le plus problématique est sans doute la thermodynamique de première année. La définition même du système étudié (le fluide caloporteur décrivant des cycles) pose problème. Rappelons que le programme de première année est l'objet d'interrogations au même titre que celui de deuxième année.

♡ Il faut se souvenir des propriétés du gaz parfait.

♡ Il faut se souvenir du premier principe de la thermodynamique et que l'énergie interne est une fonction d'état.

Rapport du jury 2016

Des problèmes classiques de manipulation des deux principes ont semblé insolubles pour de nombreux candidats.

Formulaire

- Équation d'état du gaz parfait :

$$PV = nRT.$$

- Premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

$$\Delta U = W + Q.$$

- Loi de Laplace pour un gaz parfait :

$$PV^\gamma = Cte.$$

- Variation d'énergie interne d'un gaz parfait :

$$\Delta U = nc_v T.$$

- Variation d'énergie interne d'une phase condensée :

$$\Delta U = C\Delta T.$$

Énoncé

On considère un objet AB tel que $\overline{AB} = 1$ cm et situé à 10 cm devant une lentille convergente de distance focale 5 cm.

- 1) Déterminer la nature, le sens, la grandeur, la position de l'image créée.
- 2) Retrouver ces informations par un schéma.
- 3) Tracer le trajet d'un rayon faisant un angle quelconque avec l'axe optique.
- 4) Si l'on approche l'objet de 1 cm de la lentille que se passe-t-il ?
- 5) Reprendre les deux premières questions pour un objet situé à 3 cm avant la lentille et ensuite 10 cm après la lentille.

On donne la relation de conjugaison d'une lentille mince :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice qui porte sur l'optique géométrique et particulièrement sur la formation des images.

- 1) Il faut pour cette question utiliser la formule de conjugaison.

↪ Pas de difficulté pour cette question.

- 2) Dans cette question, il s'agit de faire le schéma.

↪ Il est possible de commencer par la construction géométrique. Penser à respecter l'échelle afin de contrôler les résultats de la question précédente.

- 3) Encore une question de cours où il faut tracer le rayon sortant de la lentille qui arrive incliné par rapport à l'axe optique.

↪ Utiliser les propriétés des tracés. Un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.

- 4) Cette question peut être résolue grâce au calcul et contrôlée par un schéma.

↪ Pas de difficulté.

- 5) Il s'agit de reprendre les questions pour un objet situé entre la lentille et le foyer objet et pour un objet virtuel.

↪ Utiliser la formule de conjugaison en faisant bien attention au fait que les grandeurs sont algébriques.

↪ Contrôler les résultats par un schéma en utilisant les propriétés de deux rayons lumineux.

Corrigé

1) Nous devons utiliser la formule de conjugaison de la lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{f' + \overline{OA}}{f' \overline{OA}}$$

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

Nous avons :

$$\overline{OA} = -10 \text{ cm} ; f' = 5 \text{ cm.}$$

L'application numérique donne :

$$\overline{OA'} = \frac{5 \times (-10)}{5 - 10}$$

$$\overline{OA'} = 10 \text{ cm.}$$

Nous pouvons en conclure que l'image est réelle car $\overline{OA'} > 0$.

Il faut maintenant déterminer le grandissement qui vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

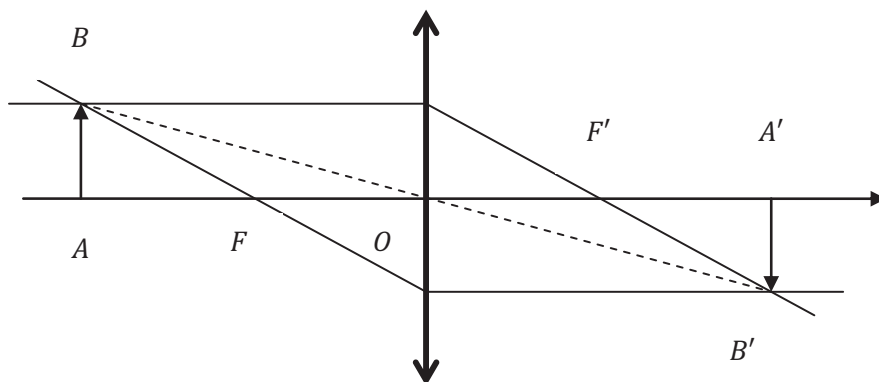
$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

L'application numérique donne :

$$\gamma = \frac{10}{-10} = -1.$$

L'image est donc inversée et de même taille que l'objet.

2) Maintenant, nous allons vérifier nos résultats grâce à un schéma.

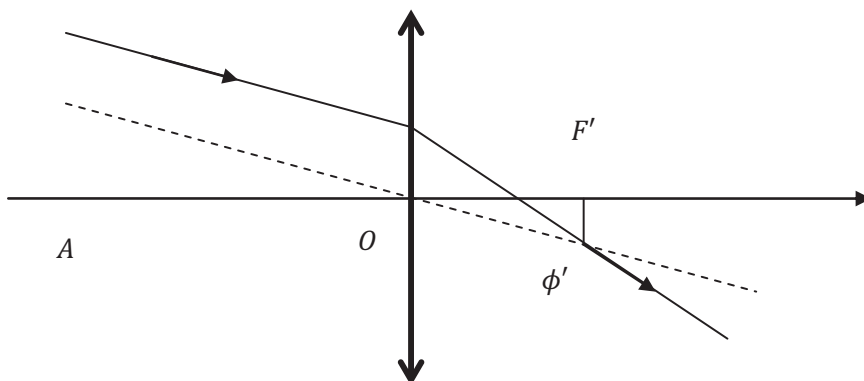


Sur le schéma, nous pouvons facilement vérifier que l'image est réelle inversée, placée à 10 cm derrière la lentille c'est-à-dire que $\overline{AO} = \overline{OA'}$. La taille de l'image est aussi égale à la taille de l'objet.

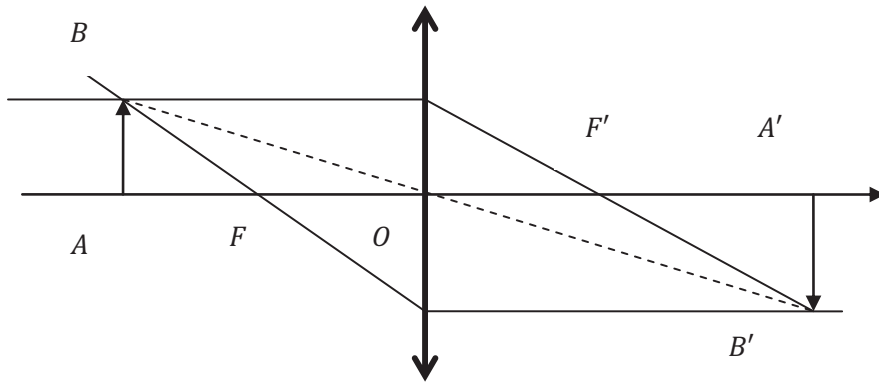
3) Pour tracer le trajet d'un rayon faisant un angle quelconque avec l'axe optique, il faut tracer le rayon parallèle au rayon incident et passant par le centre.

Nous en déduisons le foyer image secondaire ϕ' .

Le rayon incident passe donc par ce foyer image secondaire.



4) Nous approchons l'objet de la lentille, l'image s'éloigne et sa taille augmente.



En utilisant la formule de conjugaison, nous avons :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

$$\overline{OA} = -9 \text{ cm} ; f' = 5 \text{ cm}.$$

L'application numérique donne :

$$\overline{OA'} = \frac{5 \times (-9)}{5 - 9}$$

$$\overline{OA'} = 11,25 \text{ cm}.$$

Nous pouvons en conclure que l'image s'est éloignée de la lentille.

Il faut maintenant déterminer le grandissement qui vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

L'application numérique donne :

$$\gamma = \frac{11,25}{-9}$$

$$\gamma = -1,25.$$

L'image est donc inversée et agrandie.

5) Pour un objet situé 3 cm avant la lentille, nous avons :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

Nous avons :

$$\overline{OA} = -3 \text{ cm} ; f' = 5 \text{ cm}.$$

L'application numérique donne :

$$\overline{OA'} = \frac{5 \times (-3)}{5 - 3}$$

$$\overline{OA'} = -7,5 \text{ cm.}$$

Nous pouvons en conclure que l'image est virtuelle car $\overline{OA'} < 0$.

Il faut maintenant déterminer le grandissement qui vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

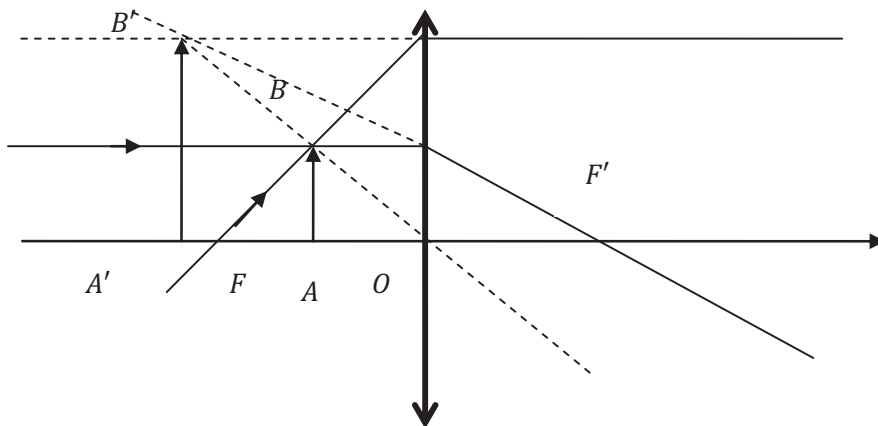
L'application numérique donne :

$$\gamma = \frac{-7,5}{-3}$$

$$\gamma = 2,5.$$

L'image est donc droite et agrandie.

Maintenant, nous allons vérifier nos résultats grâce à un schéma.



Sur le schéma, nous pouvons facilement vérifier que l'image est imaginaire, agrandie et droite.

Pour un objet situé 10 cm après la lentille, nous avons :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

Nous avons :

$$\overline{OA} = 10 \text{ cm} ; f' = 5 \text{ cm.}$$

L'application numérique donne :

$$\overline{OA'} = \frac{5 \times 10}{5 + 10} = 3,3 \text{ cm.}$$

Nous pouvons en conclure que l'image est réelle car $\overline{OA'} > 0$.

Il faut maintenant déterminer le grandissement qui vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

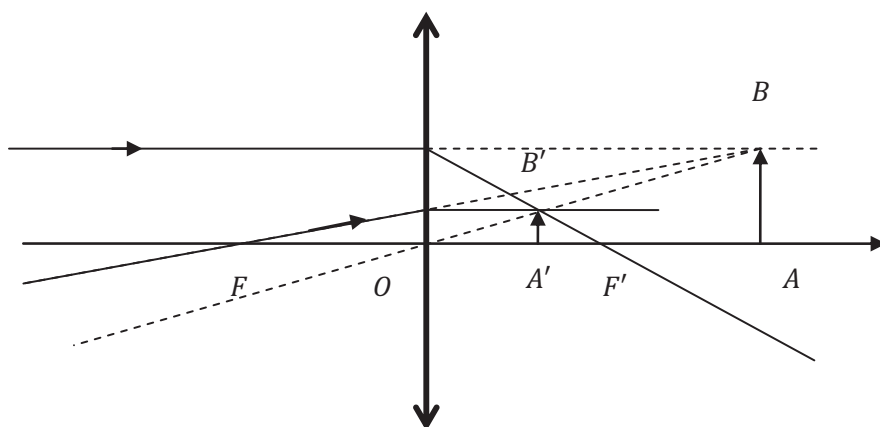
L'application numérique donne :

$$\gamma = \frac{3,3}{10}$$

$$\gamma = 0,33.$$

L'image est donc droite et plus petite.

Maintenant, nous allons vérifier nos résultats grâce à un schéma.



Sur le schéma, nous pouvons facilement vérifier que l'image est réelle, plus petite et droite.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des propriétés qui permettent de tracer les rayons lumineux à travers une lentille.

Rapport du jury 2016

En optique géométrique, les tracés des rayons sont problématiques, même pour des rayons incidents parallèles à l'axe. La notion de foyers secondaires n'est pas acquise.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement les formules de conjugaison et de grandissement bien qu'elles soient rappelées dans le sujet.

Rapport du jury 2016

Beaucoup d'élèves pensent pouvoir se débrouiller car les formules sont données dans les énoncés. C'est le contraire qui se passe car ils n'ont pas fait les efforts suffisants pour comprendre cette partie du cours et font des erreurs d'algébrisation. On n'entend jamais le vocabulaire « points conjugués ou image d'un objet », ce qui est pourtant bien utile.

Formulaire

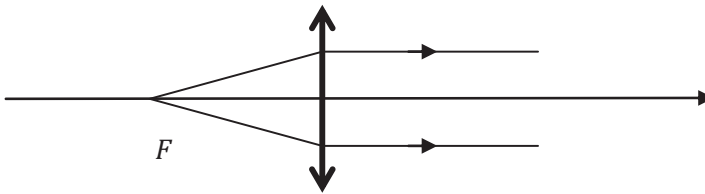
- Formule de conjugaison de de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

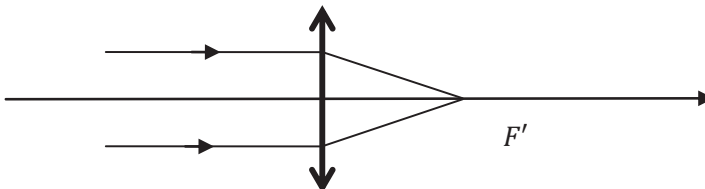
- Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- Foyer objet : c'est le point de l'axe tel que le rayon issu de ce point ressort parallèle à l'axe.

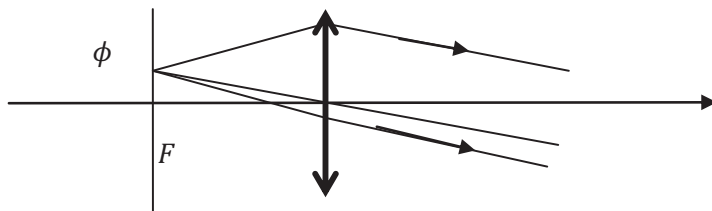


- Foyer image : c'est le point de l'axe où vient converger le rayon parallèle à l'axe.



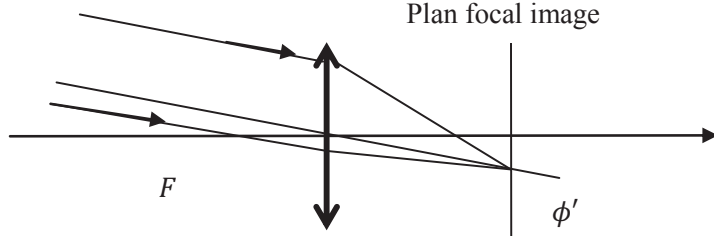
- Foyer objet secondaire : il appartient au plan focal objet. Un faisceau issu du foyer objet secondaire ressort parallèle et incliné par rapport à l'axe.

Plan focal objet



- Foyer image secondaire : il appartient au plan focal image. Un faisceau parallèle et incliné par rapport à l'axe converge au foyer image secondaire.

Plan focal image



Jour n°14

Exercice 14.1

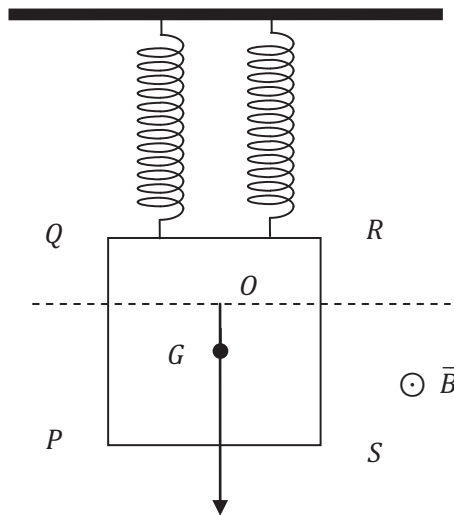
Un cadre carré $PQRS$, de côté a , de masse m , de résistance R est suspendu au plafond par deux ressorts de raideur $\frac{k}{2}$. On appelle G le centre de masse du cadre.

À l'équilibre le point G se trouve à l'origine.

Un champ magnétique uniforme se situe au-dessous de la ligne en pointillés. Il est nul au-dessus.

Décrire le mouvement du cadre avec les conditions initiales suivantes :

$$v(G) = 0 ; z(G) = \frac{a}{2}.$$



Exercice 14.2

Un point M de masse m est attaché à un fil inextensible de masse nulle. Le fil est attaché en O et a une longueur L . Sous ce point O , on fixe un clou au point A qui se trouve à la verticale du point O .

On note $OA = h$. Initialement le fil fait un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à la verticale et lâché sans vitesse initiale.

- 1) Montrer que le mouvement de la masse est plan.
- 2) Donner la vitesse du point lorsqu'il atteint son altitude la plus haute au-dessus du point A . Faire l'application numérique.
- 3) À quelle condition le point M fait un tour complet autour du clou sans que le fil ne se détende ?

Données :

$$m = 50 \text{ g}$$

$$L = 60 \text{ cm}$$

$$h = 55 \text{ cm.}$$

Énoncé

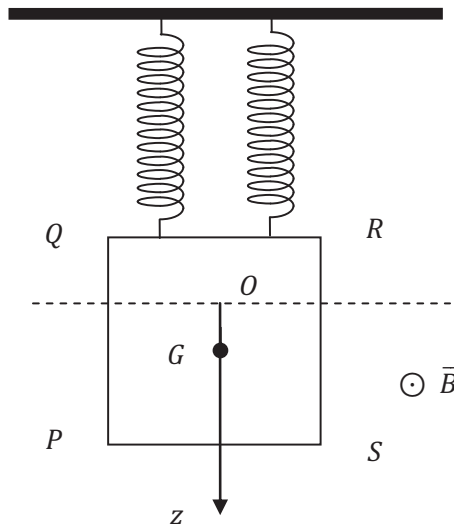
Un cadre carré $PQRS$, de côté a , de masse m , de résistance R est suspendu au plafond par deux ressorts de raideur $\frac{k}{2}$. On appelle G le centre de masse du cadre.

À l'équilibre le point G se trouve à l'origine.

Un champ magnétique uniforme se situe au-dessous de la ligne en pointillés. Il est nul au-dessus.

Décrire le mouvement du cadre avec les conditions initiales suivantes :

$$v(G) = 0 ; z(G) = \frac{a}{2}.$$

**Analyse stratégique de l'énoncé**

On a ici un exercice d'induction faisant intervenir la mécanique et l'électricité.

Il faut dans un premier temps faire une analyse du problème afin d'identifier le phénomène d'induction.

↪ Nous avons affaire à un circuit mobile se déplaçant dans un champ magnétique.

Ensuite, il faut écrire deux équations : une équation mécanique et une équation électrique.

↪ Penser à faire le bilan des forces sans oublier la force de Laplace.

↪ Penser à faire schéma le électrique équivalent sans oublier d'y faire figurer la fem induite.

Chercher ensuite une équation différentielle ne faisant intervenir que la position du cadre.

↪ Utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

Corrigé

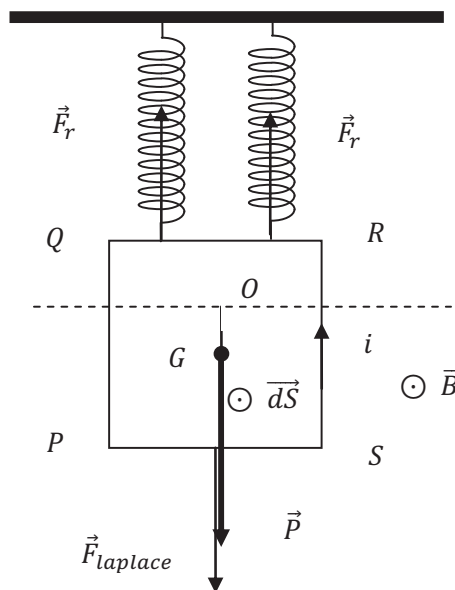
Nous avons un cadre métallique placé dans un champ magnétique et attaché à deux ressorts.

Lorsque l'on tire sur le cadre, il est soumis au poids et aux forces de rappel des ressorts qui le font remonter.

Nous avons donc un circuit mobile dans un champ magnétique. Il est donc siège d'un phénomène d'induction. Comme le flux du champ magnétique varie dans le cadre, il y a aussi apparition d'une fem induite et donc d'un courant induit. Le cadre est donc soumis à la force de Laplace.

Il faut penser à orienter le circuit afin de calculer correctement le flux et la fem induite.

Orientons le schéma et plaçons les différentes forces :

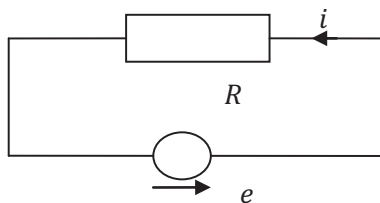


Il faut donc établir deux équations qui sont l'équation mécanique et l'équation électrique.

Commençons par l'équation électrique.

Le cadre a une résistance R .

Le schéma électrique équivalent est donc le suivant :



L'équation électrique est donc très simple :

$$e = Ri.$$

La fem induite est donnée par la loi de Faraday soit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Lorsque le centre d'inertie est à la cote z , le flux du champ magnétique à travers le circuit est :

$$\phi = B \left(\frac{a}{2} + z \right) a.$$

Nous en déduisons que :

$$e = -Ba\dot{z}.$$

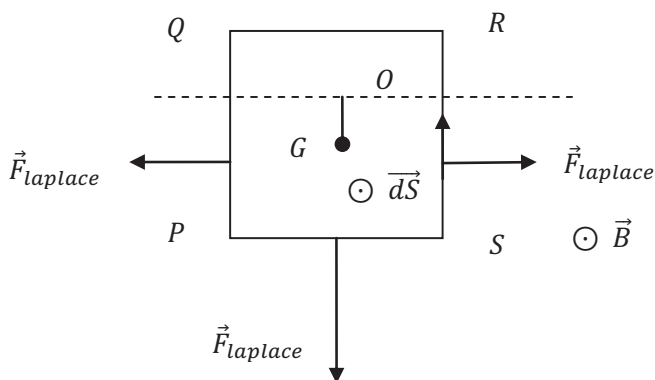
L'équation électrique est donc :

$$\boxed{-Ba\dot{z} = Ri.}$$

Maintenant nous pouvons appliquer la deuxième loi de Newton au cadre :

$$m\vec{a} = \vec{P} + 2\vec{F}_r + \vec{F}_{laplace}.$$

Nous pouvons remarquer que la force de Laplace existe sur toutes les parties du cadre plongées dans le champ magnétique. Sur les deux parties verticales du cadre les forces se compensent et il reste la composante de la force exercée sur la partie horizontale du cadre. La résultante des forces de Laplace est donc verticale. Nous illustrons ces propos par un schéma :



La résultante des forces de Laplace est donc égale à :

$$\vec{F}_{laplace} = iBa\vec{e}_z.$$

La force de rappel du ressort vaut :

$$\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_z.$$

Penser à multiplier cette force par 2 car il y a deux ressorts identiques.

À l'équilibre, nous avons les ressorts avec leur longueur l_{eq} et $z = 0$:

$$0 = mg - 2k(l_{eq} - l_0).$$

La longueur du ressort est définie par :

$$l - l_{eq} = z.$$

La projection de la seconde loi de Newton sur l'axe Oz donne :

$$m\ddot{z} = mg - 2k(l - l_0) + iaB.$$

En utilisant la relation obtenue à l'équilibre, nous avons :

$$m\ddot{z} = 2k(l_{eq} - l_0) - 2k(l - l_0) + iaB$$

$$m\ddot{z} = -2k(l - l_{eq}) + iaB$$

$$\boxed{m\ddot{z} = -2kz + iaB.}$$

Nous obtenons donc deux équations couplées. Il faut maintenant remplacer l'expression du courant dans l'équation mécanique en utilisant l'équation électrique :

$$i = -\frac{Ba\dot{z}}{R}$$

$$m\ddot{z} = -2kz + \left(-\frac{Ba\dot{z}}{R}\right)aB.$$

Nous obtenons donc une équation faisant intervenir uniquement la position du centre d'inertie du cadre soit :

$$\ddot{z} + \frac{B^2 a^2}{mR} \dot{z} + \frac{2k}{m} z = 0.$$

Nous avons donc une équation différentielle du second ordre sans second membre.

L'équation caractéristique est la suivante :

$$r^2 + \frac{B^2 a^2}{mR} r + \frac{2k}{m} z = 0.$$

Le discriminant est donc :

$$\Delta = \left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}.$$

Il faut donc discuter en fonction du signe de ce discriminant.

Si $\Delta > 0$, la constante de raideur du ressort est relativement faible et dans ce cas, le mouvement du cadre va être amorti.

Les solutions sont :

$$r_1 = -\frac{B^2 a^2}{2mR} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}}$$

$$r_2 = -\frac{B^2 a^2}{2mR} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}}$$

$$z(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}.$$

Pour déterminer les deux constantes d'intégration nous utilisons les conditions initiales soit :

$$z(t=0) = \frac{a}{2} = \alpha + \beta$$

$$\dot{z}(t=0) = 0 = \alpha r_1 + \beta r_2$$

La résolution donne :

$$\frac{a}{2} - \beta = \alpha ; \left(\frac{a}{2} - \beta\right) r_1 + \beta r_2 = 0$$

$$\beta = \frac{\alpha r_1}{2(r_1 - r_2)} = \frac{a \left(-\frac{B^2 a^2}{mR} + \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}} \right)}{4 \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}}}$$

$$\alpha = \frac{a}{2} - \beta = \frac{a}{2} - \frac{a \left(-\frac{B^2 a^2}{mR} + \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}} \right)}{4 \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}}}$$

$$\alpha = \frac{a \left(\sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}} + \frac{B^2 a^2}{mR} \right)}{4 \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2 - \frac{8k}{m}}}.$$

Nous avons donc un régime apériodique et le cadre retrouve sa position d'équilibre sans oscillations.

Si $\Delta = 0$, la solution est :

$$r = -\frac{B^2 a^2}{2mR}$$

$$z(t) = (\alpha + \beta t)e^{rt}.$$

Pour déterminer les deux constantes d'intégration nous utilisons les conditions initiales soit :

$$z(t = 0) = \frac{a}{2} = \alpha$$

$$\dot{z}(t = 0) = 0 = \beta + r\alpha.$$

La résolution donne :

$$\frac{a}{2} = \alpha ; \beta = -\frac{a}{2}r$$

$$\beta = \frac{a B^2 a^2}{4 m R}.$$

Nous avons donc le régime critique et le cadre retrouve sa position d'équilibre rapidement et sans osciller.

Si $\Delta < 0$, la constante de raideur du ressort est assez importante et dans ce cas, le mouvement du cadre va être oscillatoire et amorti. Les solutions sont :

$$r_1 = -\frac{B^2 a^2}{2mR} + j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2} = \frac{1}{\tau} + j\omega$$

$$r_2 = -\frac{B^2 a^2}{2mR} - j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{mR}\right)^2} = \frac{1}{\tau} - j\omega$$

$$z(t) = \left(\alpha \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{2mR}\right)^2} t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{2mR}\right)^2} t\right) \right) e^{-\frac{B^2 a^2}{2mR} t}.$$

En utilisant les notations simplifiées nous avons :

$$z(t) = (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Calculons la dérivée :

$$\dot{z}(t) = \left(-\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t) - \frac{1}{\tau}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Pour déterminer les deux constantes d'intégration nous utilisons les conditions initiales soit :

$$z(t = 0) = \frac{a}{2} = \alpha$$

$$\dot{z}(t = 0) = 0 = \beta\omega - \frac{\alpha}{\tau}.$$

La résolution donne :

$$\alpha = \frac{a}{2} ; \beta = \frac{a}{2\tau\omega}.$$

Nous avons donc un régime pseudo-périodique et le cadre retrouve sa position d'équilibre après plusieurs oscillations amorties. La pseudo-pulsation est donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{2mR}\right)^2}.$$

En l'absence de champ magnétique, nous retrouvons bien la période d'oscillation des deux ressorts qui vaut $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

La pseudo-période vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{B^2 a^2}{2mR}\right)^2}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de faire une analyse du système avant de commencer les calculs et d'identifier correctement les phénomènes d'induction.

Rapport du jury 2015

L'induction est rarement identifiée et semble se ramener à une suite de formules désincarnées.

♡ Il faut se souvenir de la résolution de l'équation différentielle du second ordre et des différents régimes.

♡ Il faut se souvenir d'orienter correctement les circuits lors des phénomènes d'induction et de savoir justifier votre choix.

Rapport du jury 2016

L'induction est relativement connue mais les orientations sont rarement bien justifiées.

Formulaire

- Flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}.$$

- Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

- Force de tension du ressort :

$$\vec{F}_{ressort} = -k(\text{longueur totale} - \text{longueur à vide})\vec{e}_z.$$

- Force de Laplace :

$$\vec{F}_{laplace} = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

- Résolution de l'équation différentielle du second ordre sans second membre :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

L'équation caractéristique est la suivante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant est donc :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2.$$

Si $\Delta > 0$, la solution correspond au régime est apériodique :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ z(t) &= \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}. \end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$, la solution correspond au régime critique :

$$\begin{aligned} r &= -\lambda \\ z(t) &= (\alpha + \beta t)e^{rt}. \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$, la solution correspond au régime pseudo-périodique :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ r_2 &= -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ z(t) &= \left(\alpha \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) \right) e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Énoncé

Un point M de masse m est attaché à un fil inextensible de masse nulle. Le fil est attaché en O et a une longueur L . Sous ce point O , on fixe un clou au point A qui se trouve à la verticale du point O .

On note $OA = h$. Initialement le fil fait un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à la verticale et lâché sans vitesse initiale.

- 1) Montrer que le mouvement de la masse est plan.
- 2) Donner la vitesse du point lorsqu'il atteint son altitude la plus haute au-dessus du point A . Faire l'application numérique.
- 3) À quelle condition le point M fait un tour complet autour du clou sans que le fil ne se détende ?

Données :

$$\begin{aligned}m &= 50 \text{ g} \\L &= 60 \text{ cm} \\h &= 55 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur la mécanique du point.

- 1) Il faut commencer par faire un bilan des forces et regarder les conditions initiales.

↪ Cette question ne pose pas de difficultés.

- 2) Comme le système est conservatif, il faut penser à utiliser l'énergie mécanique.

↪ L'énergie mécanique se conserve. Écrire l'énergie mécanique dans l'état initial et dans l'état final.

- 3) Pour savoir si la corde est tendue, il faut déterminer la tension de cette dernière.

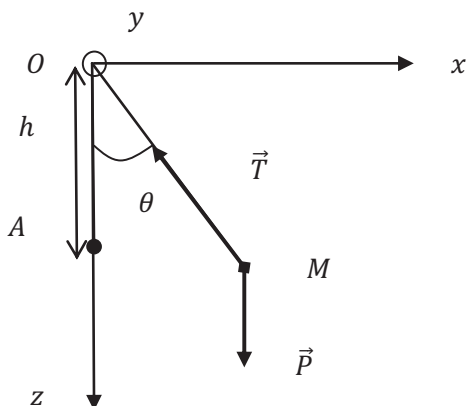
↪ Appliquer la seconde loi de Newton à la masse ponctuelle.

Corrigé

- 1) Le système est constitué de la masse ponctuelle. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

La masse est soumise au poids et à la tension du fil. Ces deux forces appartiennent au plan constitué par la verticale et le fil. Comme le système est lâché sans vitesse initiale, le mouvement est donc nécessairement dans le plan.

Le système peut être représenté par le schéma suivant :



La seconde loi de Newton donne en coordonnées cartésiennes :

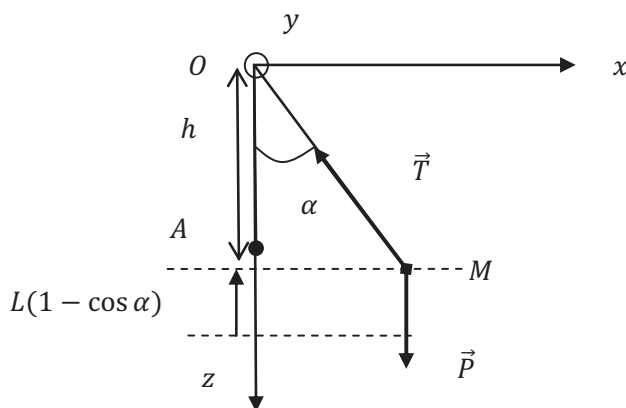
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \theta = -T \frac{x}{L} \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= mg - T \cos \theta = mg - T \frac{z}{L}. \end{aligned}$$

La résolution de la deuxième équation donne en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= cte = 0 \\ y &= cte = 0. \end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver que le mouvement est plan dans le plan xOz .

2) La masse ponctuelle est soumise au poids qui dérive d'une énergie potentielle et à la tension du fil qui ne travaille pas. Nous avons donc affaire à un système conservatif.



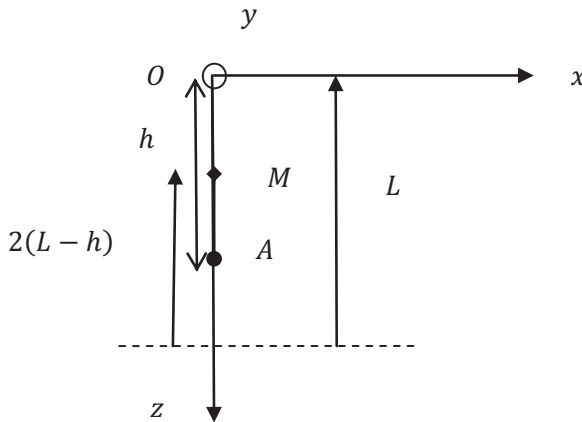
L'énergie mécanique initiale est donc égale à l'énergie potentielle de pesanteur qui vaut en prenant l'énergie potentielle nulle lorsque la masse est au plus bas :

$$E_m = E_p = mgL(1 - \cos \alpha).$$

Lorsque la masse arrive au plus bas juste avant le contact en A, l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_{max}^2.$$

Nous supposons que l'énergie est conservée lors du contact avec le point A.



Lorsque le point matériel est en haut, l'énergie mécanique devient égale à :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + 2mg(L - h).$$

La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 + 2mg(L - h) = mgL(1 - \cos \alpha).$$

Nous avons donc :

$$v^2 = -4g(L - h) + 2gL(1 - \cos \alpha)$$

$$v^2 = 4gh - 2gL - 2gL \cos \alpha.$$

Nous pouvons donc en déduire la vitesse si le terme est positif :

$$v = \sqrt{g(4h - 2L - 2L \cos \alpha)}.$$

L'application numérique donne :

$$v = \sqrt{9,8 \times (4 \times 0,55 - 2 \times 0,6 - 2 \times 0,6 \times \cos 45^\circ)}$$

$$v = 1,21 \text{ m.s}^{-1}.$$

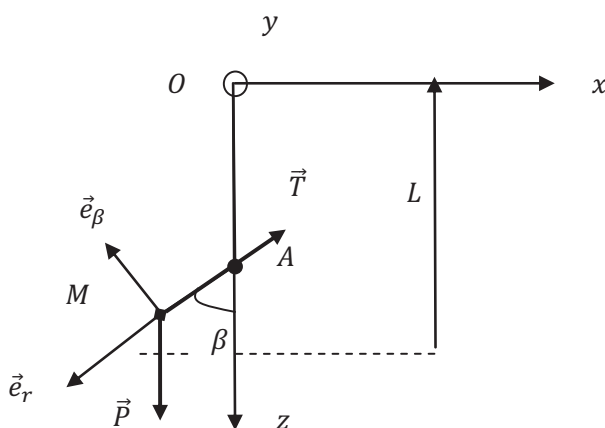
Cette vitesse trouvée est la vitesse maximale que peut atteindre la masse ponctuelle. En réalité, elle est inférieure car nous avons négligé les frottements de l'air et la perte d'énergie au moment du choc du fil au point A.

3) Maintenant, il faut trouver les conditions pour que le fil reste tendu lorsque la masse se trouve au-dessus du point A. Pour cela il faut déterminer la tension du fil. Il faut donc utiliser la seconde loi de Newton appliquée à la masse M dans le référentiel galiléen.

Nous avons donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Le mouvement de la masse est un mouvement circulaire de centre A et de rayon $L - h$. Prenons comme repère les coordonnées polaires centrées en A.



La deuxième loi de Newton donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Pour retrouver l'accélération, on écrit le vecteur position :

$$\overrightarrow{AM} = (L - h)\vec{e}_r.$$

La vitesse est donc égale à :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = (L - h)\dot{\beta}\vec{e}_\beta$$

L'accélération est donc égale à :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (L - h)\ddot{\beta}\vec{e}_\beta - (L - h)\dot{\beta}^2\vec{e}_r.$$

En projection sur les vecteurs polaires, nous obtenons :

$$-m(L - h)\dot{\beta}^2 = -T + mg \cos \beta$$

$$m(L - h)\ddot{\beta} = -mg \sin \beta.$$

Nous avons donc :

$$T = mg \cos \beta + m(L - h)\dot{\beta}^2.$$

Il faut donc trouver l'expression de $\dot{\beta}$. Pour cela, nous allons utiliser la deuxième équation et la multiplier par $\dot{\beta}$. Nous obtenons :

$$m(L - h)\ddot{\beta}\dot{\beta} = -mg\dot{\beta} \sin \beta.$$

Il faut maintenant l'intégrer entre l'état initial où la masse est tout en bas et l'instant t où l'angle est égal à β :

$$\frac{1}{2}m(L - h)\dot{\beta}^2 - \frac{1}{2}m(L - h)\dot{\beta}^2(t = 0) = mg \cos \beta - mg.$$

La vitesse initiale est donnée dans la question précédente et vaut v_{max} :

$$mgL(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv_{max}^2.$$

$$v_{max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}.$$

α représente l'angle initial à partir duquel la masse est lâchée sans vitesse initiale.

La vitesse initiale est aussi donnée par :

$$v_{max} = (L - h)\dot{\beta}(t = 0).$$

Nous en déduisons la vitesse angulaire initiale :

$$\dot{\beta}(t = 0) = \frac{\sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}}{(L - h)}.$$

Nous pouvons remplacer dans l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(L - h)\dot{\beta}^2 - \frac{1}{2}m(L - h)\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)^2} &= mg \cos \beta - mg \\ m(L - h)\dot{\beta}^2 &= m\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)} + 2mg \cos \beta - 2mg. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc maintenant en déduire l'expression de la tension du fil :

$$\begin{aligned} T &= mg \cos \beta + m\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)} + 2mg \cos \beta - 2mg \\ T &= 3mg \cos \beta - 2mg + m\left(\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)}\right). \end{aligned}$$

Cette tension est minimale lorsque $\beta = \pi$.

Cette position correspond au moment où la masse se trouve tout en haut.

$$T_{min} = -5mg + m\left(\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)}\right).$$

Pour que la corde reste tendue, il faut que T_{min} soit strictement positif soit :

$$-5mg + m \left(\frac{2gL(1 - \cos \alpha)}{(L - h)} \right) > 0$$

$$\frac{2L(1 - \cos \alpha)}{(L - h)} > 5$$

$$1 - \cos \alpha > \frac{5L - h}{2L}$$

$$\cos \alpha < 1 - \frac{5L - h}{2L}.$$

L'application numérique donne :

$$1 - \frac{5L - h}{2L} = 1 - \frac{5 \cdot 60 - 55}{2 \cdot 60} = 0,79.$$

Nous trouvons donc l'angle minimal sous lequel doit être lâchée la masse :

$$\alpha_{min} = \arccos \left(1 - \frac{5L - h}{2L} \right).$$

L'application numérique donne :

$$\alpha_{min} = \arccos(0,79) = 37,67^\circ = 0,66 \text{ rad.}$$

Dans l'angle de 45° permet à la masse de faire un tour complet.

Pour les angles inférieurs à α_{min} , la tension devient nulle pour une valeur de l'angle β et la masse n'est plus soumise qu'au poids et elle est donc en chute libre tant que le fil est détendu.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de bien définir le système et le référentiel.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser lorsque c'est possible les bilans énergétiques.

Rapport du jury 2017

Beaucoup de candidats ne pensent toujours pas à la conservation de l'énergie mécanique totale pour des systèmes qui ne dépendent pourtant que d'un paramètre.

♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les vecteurs dans la base adéquate.

Rapport du jury 2017

D'une manière générale, de nombreuses erreurs de projection des forces et des moments sont à déplorer. La volonté affichée de déterminer ces grandeurs « avec les mains » - plutôt qu'avec un formalisme mathématique rigoureux, est finalement préjudiciable aux candidats.

Formulaire

- Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

- Énergie potentielle de pesanteur avec l'axe Oz vertical descendant :

$$E_p = -mgz + cte.$$

- Énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p.$$

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

- Vecteur position, vitesse et accélération pour un mouvement circulaire en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r.$$

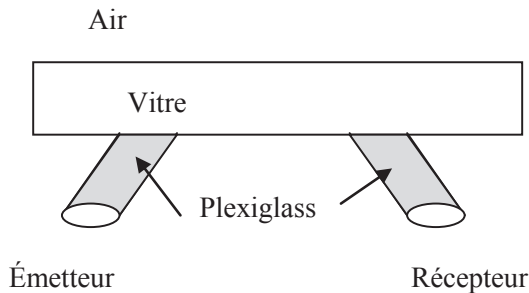
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Jour n°15

Exercice 15.1

Le schéma du détecteur de pluie est le suivant :



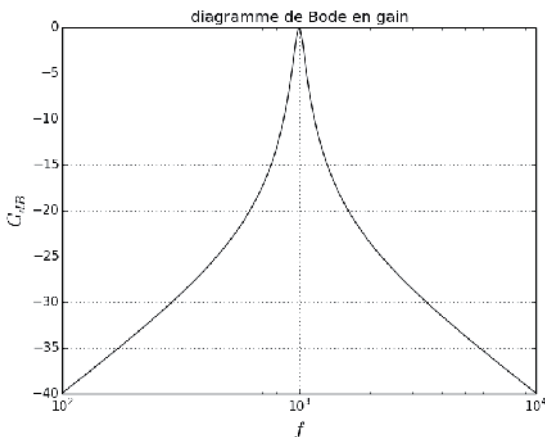
Un faisceau incident parallèle est émis par l'émetteur sous un angle θ_1 .

- 1) Expliquer le principe du détecteur de pluie en utilisant les lois de l'optique géométrique. On prend $\theta_1 = 50^\circ$.
- 2) Déterminer la plage de valeurs de θ_1 pour qu'il y ait détection.

Données : $n_{\text{air}} = 1$; $n_{\text{eau}} = 1,33$; $n_{\text{verre}} = 1,6$; $n_{\text{plexi}} = 1,5$.

Exercice 15.2

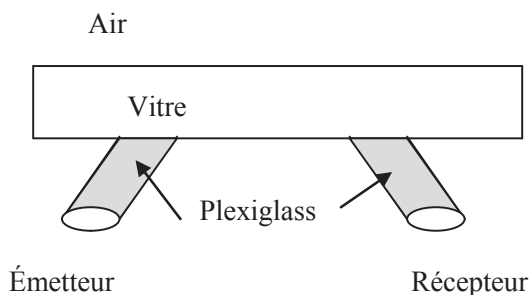
On donne le diagramme de Bode en gain suivant :



- 1) Quelle est la nature du filtre ?
- 2) Déterminer le circuit dont il s'agit sachant qu'il comporte trois éléments qui sont une résistance, une capacité et une inductance.
- 3) Soit $Q = 10$ le facteur de qualité, retrouver cette valeur graphiquement.
- 4) Si la capacité du condensateur du circuit RLC équivalent vaut $C = 1 \mu\text{F}$, déterminer l'inductance L et la résistance R .

Énoncé

Le schéma du détecteur de pluie est le suivant :



Un faisceau incident parallèle est émis par l'émetteur sous un angle θ_1 .

- 1) Expliquer le principe du détecteur de pluie en utilisant les lois de l'optique géométrique. On prend $\theta_1 = 50^\circ$.
- 2) Déterminer la plage de valeurs de θ_1 pour qu'il y ait détection.

Données : $n_{\text{air}} = 1$; $n_{\text{eau}} = 1,33$; $n_{\text{verre}} = 1,6$; $n_{\text{plexi}} = 1,5$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'une résolution de problème utilisant les lois de Descartes.

- 1) Il faut utiliser les lois de Descartes pour expliquer le principe du détecteur de pluie qui doit mettre en mouvement les essuie-glaces en cas de pluie.

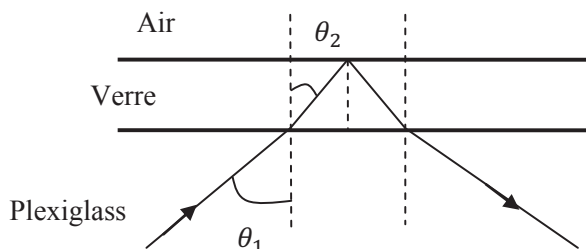
↪ Bien faire attention aux définitions des angles. Penser à faire des schémas.

- 2) Il faut maintenant chercher toutes les valeurs possibles de l'angle d'incidence.

↪ Penser à utiliser la condition de réflexion totale.

Corrigé

- 1) Commençons par faire un schéma du système :



Dans le cas où il ne pleut pas, le rayon émis dans le plexiglas par le dispositif arrive avec un angle d'incidence θ_1 , il est donc transmis dans le verre du pare-brise. Le rayon fait donc un angle θ_2 avec la normale. Au niveau de l'interface verre air, il doit y avoir une réflexion totale.

À l'interface plexiglass-verre la relation de Descartes est :

$$n_{plexi} \sin \theta_1 = n_{verre} \sin \theta_2.$$

Il ne peut pas y avoir de réflexion totale car l'indice du verre est supérieur à l'indice du plexiglas.

La loi de Descartes à l'interface verre-air est la suivante :

$$n_{air} \sin \theta_3 = n_{verre} \sin \theta_2.$$

Comme l'indice de l'air est supérieur à l'indice du verre, il y a réflexion totale si :

$$\frac{n_{verre}}{n_{air}} \sin \theta_2 > 1.$$

La condition sur l'angle d'incidence est donc en remplaçant l'expression de l'angle θ_2 :

$$\frac{n_{plexi}}{n_{air}} \sin \theta_1 > 1.$$

Dans le cas de l'exemple donné, nous avons :

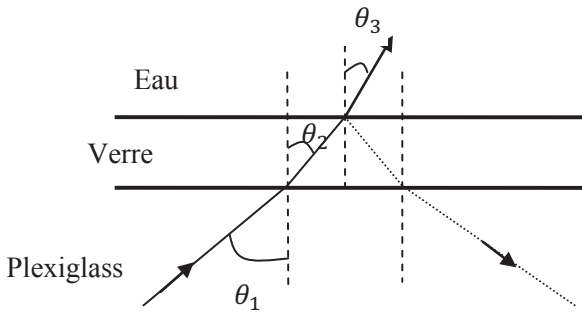
$$\frac{1,5}{1} \sin(50^\circ) = 1,14.$$

Vérifions que l'angle θ_2 existe bien. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{n_{plexi}}{n_{verre}} \sin \theta_1. \\ \frac{n_{plexi}}{n_{verre}} \sin \theta_1 &= \frac{1,5}{1,6} \sin(50^\circ) = 0,71 \\ \theta_2 &= \arcsin 0,71 = 45,9^\circ. \end{aligned}$$

En l'absence de pluie, le rayon lumineux est donc totalement réfléchi par le pare-brise et revient donc vers le détecteur. Dans ce cas les essuie-glaces ne sont pas activés.

Reprenons le raisonnement précédent mais en présence de l'eau sur le pare-brise. Nous avons donc le schéma suivant. L'air est remplacé par de l'eau dont l'indice est supérieur. Dans ce cas la réflexion totale n'est plus possible.



Il y a une réflexion partielle et donc l'intensité réfléchie est bien plus faible qu'en l'absence de pluie. Dans ce cas le détecteur reçoit un signal faible et déclenche les essuie-glaces.

Les relations sont les suivantes :

$$n_{plexi} \sin \theta_1 = n_{verre} \sin \theta_2.$$

$$n_{eau} \sin \theta_3 = n_{verre} \sin \theta_2.$$

Nous pouvons donc déterminer l'angle de sortie qui est :

$$\sin \theta_3 = \frac{n_{plexi}}{n_{eau}} \sin \theta_1.$$

L'application numérique donne :

$$\sin \theta_3 = \frac{1,5}{1,33} \sin(50^\circ) = 0,86$$

$$\theta_3 = 59,7^\circ.$$

Lorsque le détecteur reçoit un signal, il ne déclenche pas les essuie-glaces. Ce dernier n'est déclenché que lorsque le signal est plus faible. Il n'y a plus de réflexion totale en cas de pluie.

2) Pour pouvoir déclencher le détecteur de pluie, il faut qu'il y ait une réflexion totale en l'absence de pluie.

Nous reprenons donc la condition obtenue dans la première question :

$$\frac{n_{plexi}}{n_{air}} \sin \theta_1 > 1$$

$$\sin \theta_1 > \frac{n_{air}}{n_{plexi}}.$$

L'application numérique donne :

$$\sin \theta_1 > \frac{1}{1,5} = 0,67$$

$$\theta_1 > 0,72 \text{ rad} = 41,8^\circ.$$

Pour que le détecteur de pluie fonctionne, il faut un angle d'incidence supérieur à $41,8^\circ$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de faire des schémas afin de mettre toutes les chances de son côté et d'expliquer sa démarche

Rapport du jury 2016

Pour un sujet de type résolution de problème, l'objectif à atteindre sera clairement donné et le travail du candidat portera sur la démarche à suivre, l'obtention du résultat et son regard critique vis-à-vis de ce dernier. Le candidat devra mobiliser ses connaissances, capacités et compétences afin d'aborder une situation dans laquelle il doit atteindre un but bien précis, mais pour laquelle le chemin à suivre n'est pas indiqué.

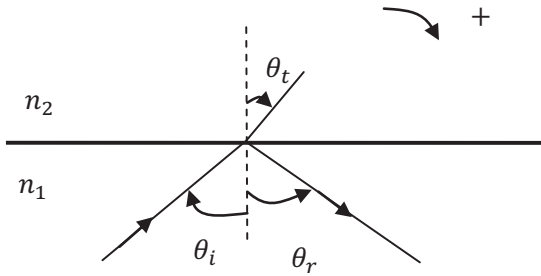
♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement les lois de Descartes et de la condition de réflexion totale.

Rapport du jury 2017

Il est évident que la maîtrise des capacités exigibles, identifiées dans le programme officiel de CPGE, est une condition nécessaire à la réussite de cette épreuve orale. Néanmoins, l'esprit d'initiative sera au cœur (et la base !) de l'échange avec l'examineur. Certes, une valeur finale chiffrée est attendue, notamment dans l'exercice type résolution de problème, mais la démarche, les pistes de résolution envisagées par le candidat seront essentielles et très valorisées. Ainsi, les examinateurs encouragent les candidats à proposer des stratégies de résolution des exercices même si elles ne sont pas totalement abouties.

Formulaire

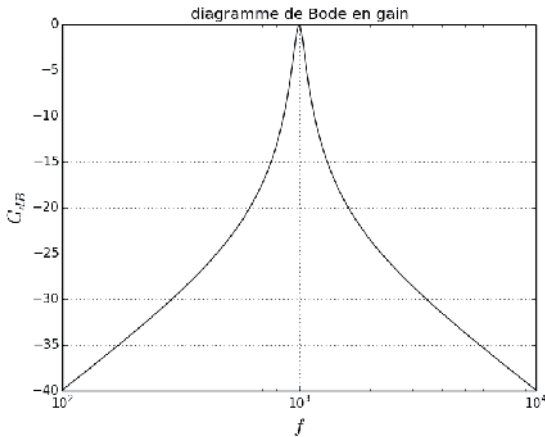
- Premières lois de Descartes : les rayons réfléchi et transmis appartiennent au plan d'incidence.
- Deuxièmes lois de Descartes :



$$\theta_i = -\theta_r$$
$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t.$$

Énoncé

On donne le diagramme de Bode en gain suivant :



- 1) Quelle est la nature du filtre ?
- 2) Déterminer le circuit dont il s'agit sachant qu'il comporte trois éléments qui sont une résistance, une capacité et une inductance.
- 3) Soit $Q = 10$ le facteur de qualité, retrouver cette valeur graphiquement.
- 4) Si la capacité du condensateur du circuit RLC équivalent vaut $C = 1 \mu\text{F}$, déterminer l'inductance L et la résistance R .

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur les filtres en électrocinétique.

- 1) La nature du filtre se déduit du diagramme de Bode.

↪ Aucune difficulté.

- 2) C'est un filtre passif qui contient les éléments RLC .

↪ Bien se souvenir des filtres étudiés en cours.

- 3) Cette question est simple si l'on se souvient de la façon dont le facteur de qualité intervient dans le diagramme de Bode.

↪ Bien lire le diagramme de Bode.

- 4) Là encore, il faut trouver deux relations qui permettent de trouver les deux inconnues.

↪ Bien utiliser le diagramme de Bode et bien connaître son cours.

Corrigé

1) Il s'agit d'un filtre passe-bande. Le maximum correspond à une fréquence de 1000 Hz.

La fonction de transfert doit être de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Le module de la fonction de transfert est :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Le module de cette fonction de transfert a donc un maximum égal à 1 pour :

$$\omega = \omega_0.$$

En basse fréquence, le module de la fonction de transfert vaut :

$$H = \frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

L'asymptote en basse fréquence est donnée par :

$$g_{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log Q.$$

On a donc bien une pente à 20 décibels par décade ce qui est conforme au diagramme donné.

En haute fréquence, le module de la fonction de transfert vaut :

$$H = \frac{\omega_0}{Q\omega}.$$

L'asymptote en haute fréquence est donnée par :

$$g_{dB} = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log Q.$$

On a donc bien une pente à -20 décibels par décade ce qui est conforme au diagramme donné.

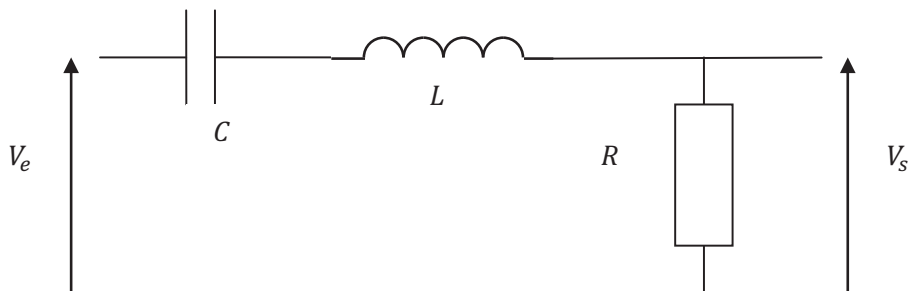
L'intersection des asymptotes est pour $\omega = \omega_0$ en :

$$g_{dB} = -20 \log Q.$$

Cette remarque permet d'en déduire la valeur du facteur de qualité.

2) On a affaire à un circuit passif qui présente une résonance. On a donc un circuit RLC série et on prend la tension de sortie aux bornes de la résistance.

Le filtre est donc le suivant :



La fonction de transfert est égale en utilisant le diviseur de tension à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

On peut la mettre sous la forme canonique en divisant par R :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie avec la forme canonique qui est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Et on obtient les résultats suivants :

$$\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$$

$$\frac{1}{RC} = Q\omega_0.$$

La résolution de ce système donne en multipliant les deux équations :

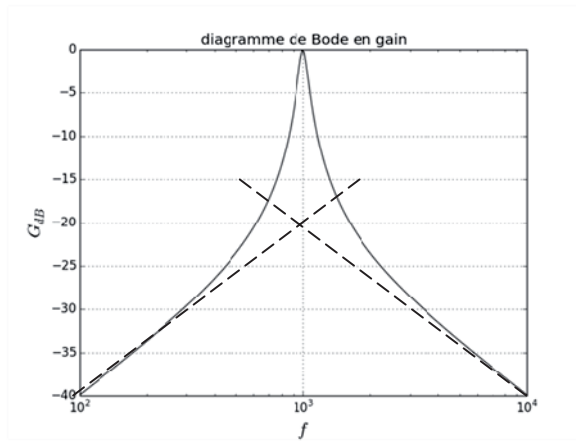
$$\frac{L}{CR^2} = Q^2.$$

En divisant les deux équations, on obtient :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Ce filtre est bien en accord avec le diagramme de Bode donné.

3) En traçant les asymptotes, on obtient le graphe suivant :



Sur le graphe, l'intersection des asymptotes donne une valeur de -20 dB.

La valeur théorique de l'intersection des asymptotes est donnée par :

$$g_{dB} = -20 \log Q.$$

En supposant que $Q = 10$; on trouve ainsi :

$$g_{dB} = -20 \log 10 = -20 \text{ dB.}$$

Ceci est donc conforme avec l'énoncé.

4) On reprend les deux équations trouvées précédemment pour déterminer les deux composants inconnus :

$$\frac{L}{CR^2} = Q^2$$

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

On trouve donc :

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} ; L = \frac{1}{C \omega_0^2}$$

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2}}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}.$$

L'application numérique donne :

$$R = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2(1000)^2 \times (10^{-6})^2}}$$

$$R = 15,9 \, \Omega.$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2(1000)^2 \times 10^{-6}}$$

$$L = 0,025 \, \text{H}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de savoir lire un diagramme de Bode en gain qui utilise l'échelle logarithmique.

Rapport du jury 2015

Concernant l'exercice à 6 points, l'ensemble des examinateurs a constaté que la lecture d'un graphe en échelle logarithmique et de façon plus générale l'exploitation d'un diagramme de Bode en électricité posait problème à de nombreux candidats. Il est attendu qu'un candidat sache déterminer les grandeurs caractéristiques d'un filtre (facteur de qualité, pulsation propre....) à partir de l'exploitation d'un diagramme de Bode. Les exploitations de courbes, que ce soit un enregistrement d'un régime transitoire, un diagramme de Bode... n'ont pas été traitées de manière satisfaisante. Un effort doit être porté sur cet aspect.

Rapport du jury 2016

L'exploitation d'un diagramme de Bode ou de l'enregistrement d'un régime transitoire n'est que rarement bien menée.

♡ Il faut se souvenir de la forme canonique du filtre passe-bande du deuxième ordre.

♡ Il faut se souvenir de la détermination des asymptotes.

Formulaire

- Fonction de transfert pour un filtre passe-bande du deuxième ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

- Gain en décibel :

$$g_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|.$$

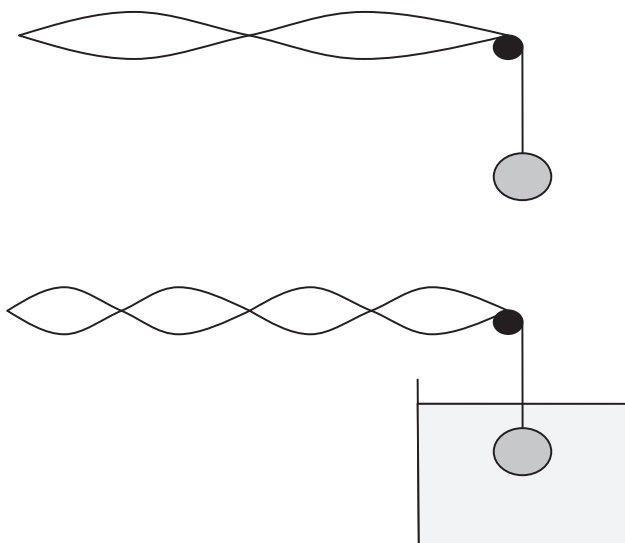
- Module du nombre complexe $\underline{Z} = \frac{1}{a+jb}$:

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jour n°16

Exercice 16.1

On dispose d'une corde de Melde qui présente deux fuseaux dans le premier cas et quatre fuseaux dans le deuxième cas lorsque la sphère de masse $m = 2 \text{ kg}$ est immergée dans de l'eau. Estimer le rayon de la sphère.



Exercice 16.2

On place sur l'axe optique deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 dont les centres optiques sont respectivement O_1 et O_2 tels que $\overline{O_1 O_2} = 55 \text{ cm}$.

La distance focale de L_1 est $f'_1 = 50 \text{ cm}$.

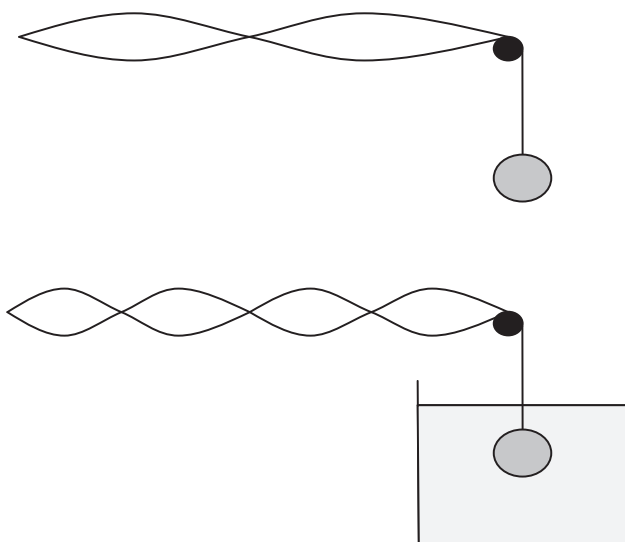
- 1) Le système est afocal. Déterminer la distance focale image de la lentille L_2 .
- 2) On éclaire le dispositif par un faisceau lumineux de surface S qui arrive en incidence normale. Déterminer la surface S' du faisceau lumineux émergent.

Formule de conjugaison d'une lentille mince origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

Énoncé

On dispose d'une corde de Melde qui présente deux fuseaux dans le premier cas et quatre fuseaux dans le deuxième cas lorsque la sphère de masse $m = 2 \text{ kg}$ est immergée dans de l'eau. Estimer le rayon de la sphère.

**Analyse stratégique de l'énoncé**

Cet exercice est une résolution de problème portant sur les ondes stationnaires.

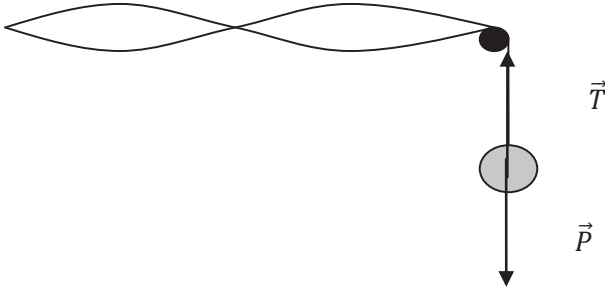
La différence entre les deux expériences est la tension exercée sur la corde. Il faut se rappeler l'expression de la célérité en fonction de la tension de la corde.

↪ Donner la relation entre la longueur d'onde et la célérité.

↪ Penser à utiliser la poussée d'Archimède.

Corrigé

Commençons par refaire le schéma afin de poser nos notations.



La masse est soumise au poids et à la tension de la corde. Nous négligeons la poussée d'Archimède de l'air.

La masse est en équilibre donc la tension de la corde est égale au poids exercée sur elle. Dans le premier cas, le poids vaut :

$$P = mg.$$

La tension de la corde est égale au poids donc :

$$T_0 = mg.$$

La célérité est donnée par la relation suivante :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

On peut retrouver cette relation à l'aide de l'analyse dimensionnelle.

$$c = T_0^\alpha \mu^\beta.$$

La dimension de la célérité est : LT^{-1} .

La dimension de la tension est aussi la dimension d'une force soit : MLT^{-2} .

La dimension de la masse linéique vaut : ML^{-1} .

Nous avons donc pour la masse :

$$0 = \alpha + \beta.$$

Pour la longueur :

$$1 = \alpha - \beta.$$

Pour le temps :

$$-1 = -2\alpha.$$

La résolution du système donne :

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2}.$$

En deuxième année, nous pouvons retrouver l'expression de la célérité en retrouvant l'équation de d'Alembert. Il faut appliquer la deuxième loi de Newton sur un morceau de corde de longueur élémentaire dx .

La longueur d'onde des ondes stationnaires est donnée par :

$$\lambda = L = cT = \frac{c}{f}.$$

Nous avons donc :

$$L = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{mg}{\mu}}.$$

Dans le cas où la bille est plongée dans l'eau, elle est soumise au poids, à la tension de la corde et à la poussée d'Archimède qui est donnée par :

$$\vec{\pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau} \vec{g}.$$

Dans le cas où la bille est dans l'eau, nous avons une masse apparente (en tenant compte de la poussée d'Archimède) qui vaut :

$$m' = m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau}.$$

Nous avons donc pour les 4 fuseaux :

$$L = 2\lambda' = \frac{2}{f} \sqrt{\frac{\left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau}\right) g}{\mu}}$$

En égalant les deux expressions de la longueur, nous avons :

$$\frac{1}{f} \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \frac{2}{f} \sqrt{\frac{\left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau}\right) g}{\mu}}$$

$$m = 4 \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau} \right)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{4\pi R^3 \rho_{eau}}{m}$$

$$R = \left(\frac{9}{16} \frac{m}{\pi \rho_{eau}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'application numérique donne :

$$R = \left(\frac{9}{16} \times \frac{2}{\pi \times 1000} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,07 \text{ m} = 7 \text{ cm}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'il est important de faire un schéma.

Rapport du jury 2016

Faire un schéma est indispensable, retenir et noter au tableau les informations nécessaires, introduire et noter au tableau les grandeurs pertinentes à la résolution.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser l'analyse dimensionnelle pour la résolution de problème.

♡ Il faut se souvenir de l'expression de la poussée d'Archimède.

♡ Il faut se souvenir de la relation entre le nombre de fuseaux et la célérité.

♡ Il faut se souvenir qu'il faut toujours donner des expressions littérales avant de passer aux applications numériques.

Rapport du jury 2015

Ne pas mélanger le calcul littéral et les applications numériques.

Formulaire

- La célérité des ondes le long de la corde :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

- Poussée d'Archimède : elle est égale à l'opposé du poids de fluide déplacé :

$$\vec{\pi} = -\rho_{\text{fluide}} V \vec{g}.$$

- Lien entre la longueur d'onde et la fréquence :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}.$$

Énoncé

On place sur l'axe optique deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 dont les centres optiques sont respectivement O_1 et O_2 tels que $\overline{O_1O_2} = 55 \text{ cm}$.

La distance focale de L_1 est $f'_1 = 50 \text{ cm}$.

- 1) Le système est afocal. Déterminer la distance focale image de la lentille L_2 .
- 2) On éclaire le dispositif par un faisceau lumineux de surface S qui arrive en incidence normale. Déterminer la surface S' du faisceau lumineux émergent.

Formule de conjugaison d'une lentille mince origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice d'optique géométrique portant sur le programme de première année.

- 1) Il faut absolument connaître la notion de système afocal. Penser à faire un schéma.

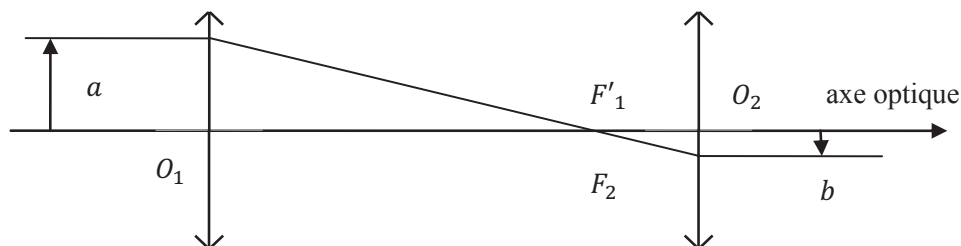
↪ Un système afocal a ses foyers rejetés à l'infini.

- 2) On utilise le schéma précédent afin de résoudre l'exercice de façon graphique. Attention à ne pas confondre le diamètre du faisceau et la surface du faisceau.

↪ Question simple qui ne pose aucune difficulté si l'on fait un schéma.

Corrigé

- 1) Un rayon venant de l'infini parallèle à l'axe optique vient converger au foyer image de la première lentille. Pour avoir un système afocal, ce rayon doit ressortir parallèle à l'axe optique. Pour cela, il doit provenir du foyer objet de la seconde lentille.



Le foyer image F'_1 est alors confondu avec le foyer objet de la deuxième lentille F_2 . Donc la distance entre les deux lentilles est égale à la somme des distances focales.

$$\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2.$$

Donc :

$$f'_2 = \overline{O_1O_2} - f'_1.$$

On passe maintenant à l'application numérique (on peut garder tous les nombres en centimètres) :

$$f'_2 = 55 - 50$$

donc :

$$\boxed{f'_2 = 5 \text{ cm.}}$$

2) On appelle a la distance entre l'axe optique et le rayon incident et b la distance entre l'axe optique et le rayon émergent.

On utilise le schéma pour résoudre cette question. Il suffit de prendre les deux triangles rectangles et on obtient :

$$\frac{a}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{b}{\overline{F'_1O_2}}.$$

On en déduit que :

$$b = \frac{f'_2}{f'_1} a.$$

Maintenant, on revient sur les surfaces :

$$S = \pi a^2 \text{ et } S' = \pi b^2.$$

Donc finalement :

$$\boxed{S' = S \left(\frac{f'_2}{f'_1} \right)^2}.$$

Reste à faire l'application numérique :

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{5}{50} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{S'}{S} = 0,01.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que l'optique géométrique peut souvent se résoudre grâce à un schéma.

♡ Il faut se souvenir de la définition d'un système afocal (sans foyer).

Formulaire

Ces formules sont redonnées mais peuvent être retrouvées grâce à un schéma.

- Formule de conjugaison d'une lentille mince origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

- Formule de conjugaison d'une lentille mince origine aux foyers :

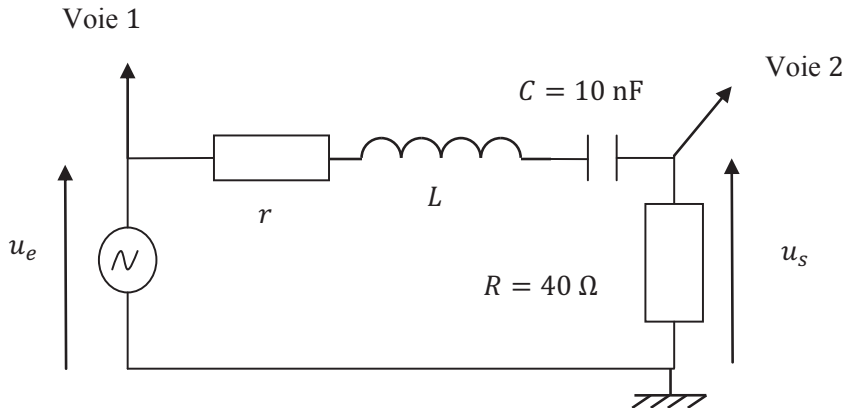
$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2.$$

- Système afocal : les foyers sont rejetés à l'infini. Un faisceau parallèle à l'axe optique ressort parallèle à l'axe optique.

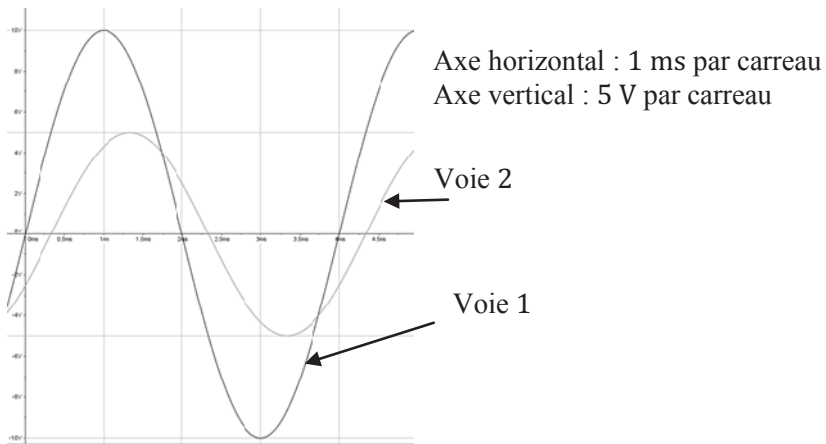
Jour n°17

Exercice 17.1

On cherche à déterminer les caractéristiques de la bobine (L, r) qui est insérée dans le circuit suivant :



L'oscilloscope donne les courbes suivantes :



- 1) À partir des courbes, déterminer la fréquence f , les amplitudes des signaux et le déphasage de la tension de sortie u_s par rapport à la tension d'entrée u_e .
- 2) En déduire r et L .

Exercice 17.2

On considère un cycle proche du moteur diesel :

$A \rightarrow B$: compression isentropique

$B \rightarrow C$: combustion isochore

$C \rightarrow D$: combustion isobare

$D \rightarrow E$: détente isentropique

$E \rightarrow A$: détente isochore.

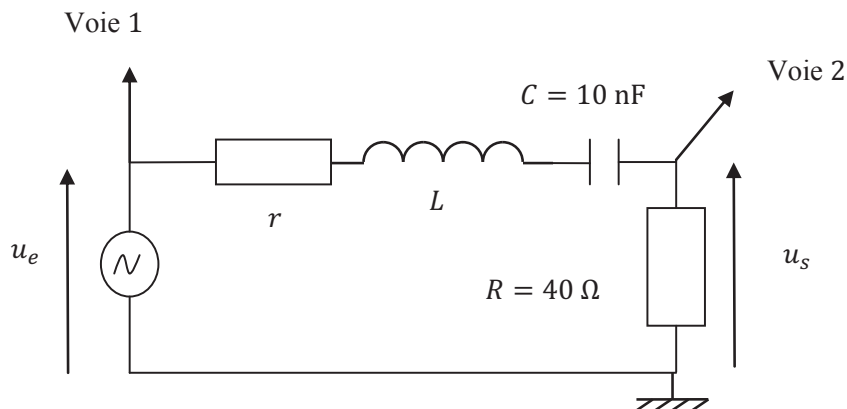
On pose :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} ; \alpha = \frac{V_B}{V_A} ; \beta = \frac{V_D}{V_C} ; \delta = \frac{P_C}{P_B}.$$

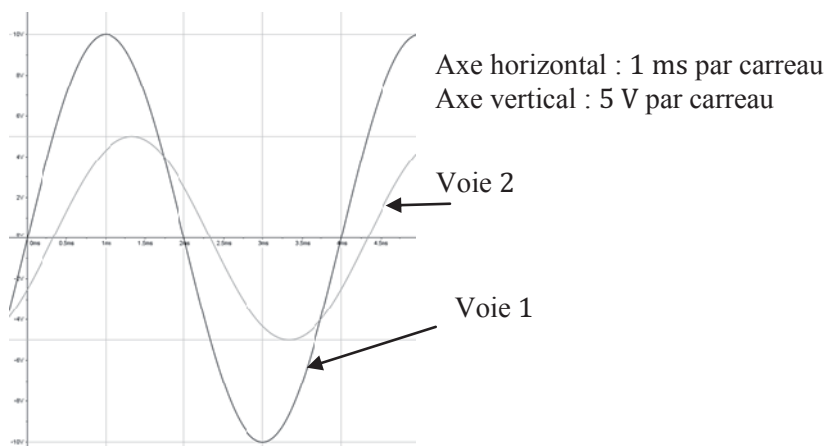
- 1) Placer les différents points dans le diagramme de Clapeyron $P = f(V)$.
- 2) Déterminer la pression P_B en fonction de P_A , γ et α .
- 3) Déterminer les différentes températures en fonction de T_A , α , β , γ , δ .
- 4) Donner les expressions et les signes des différents transferts thermiques.
- 5) Déterminer le rendement η du moteur.

Énoncé

On cherche à déterminer les caractéristiques de la bobine (L, r) qui est insérée dans le circuit suivant :



L'oscilloscope donne les courbes suivantes :



- 1) À partir des courbes, déterminer la fréquence f , les amplitudes des signaux et le déphasage de la tension de sortie u_s par rapport à la tension d'entrée u_e .
- 2) En déduire r et L .

Analyse stratégique de l'énoncé

Nous avons un exercice d'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé.

- 1) Dans cette première question, il s'agit de lire des valeurs sur les graphes.

↪ Déterminer la période et en déduire la fréquence.

↪ Déterminer les amplitudes en utilisant les échelles données.

Pour le déphasage, bien revenir à la définition.

↪ Faire attention au signe.

2) Il faut maintenant faire l'étude théorique du circuit et utiliser les valeurs trouvées précédemment.

↪ Penser à déterminer le module des tensions et le déphasage entre les deux tensions.

Corrigé

1) La période correspond à 4 carreaux soit un temps de $T = 4$ ms. La fréquence vaut donc :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ Hz.}$$

La voie 1 correspond à la tension d'entrée délivrée par le générateur. Son amplitude correspond à 1 carreau vertical soit une amplitude de la tension de $1 \times 5 = 5$ V.

La voie 2 correspond à la tension aux bornes de la résistance. Son amplitude correspond à 2 carreaux verticaux soit une amplitude de la tension de $2 \times 5 = 10$ V.

La voie 2 est en retard par rapport à la voie 1. Le décalage temporel correspond à $\frac{1}{3}$ de carreau horizontal soit à $t_1 = 0,33$ ms.

Les signaux s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_e = 10 \cos(2\pi f t)$$

$$u_s = 5 \cos(2\pi f t + \varphi)$$

avec φ le retard de la sortie sur l'entrée.

La tension de sortie est maximale pour t_1 soit :

$$2\pi f t_1 + \varphi = 0.$$

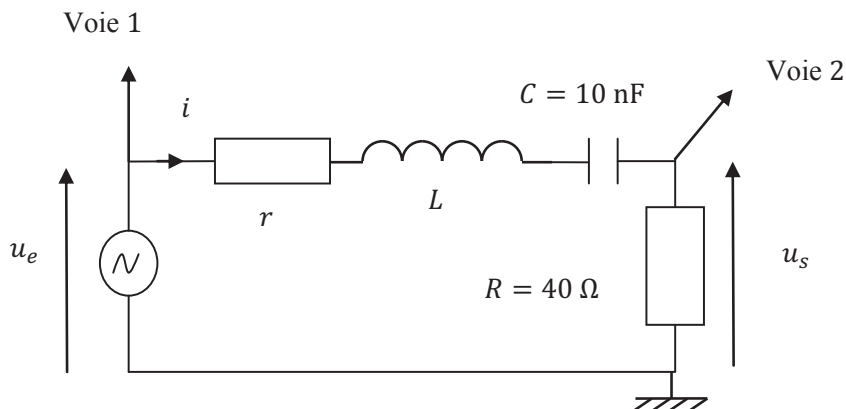
Nous en déduisons le retard de phase :

$$\varphi = -2\pi t_1 f.$$

L'application numérique donne :

$$\varphi = -2\pi \frac{1}{3} 10^{-3} \times 250 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

2) Nous allons faire l'étude théorique du circuit. Pour cela, nous appelons i le courant circulant dans le circuit. Nous avons donc le schéma suivant :



Nous avons donc en notations complexes car nous avons affaire à un régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{u}_e = \left(R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}$$

$$\underline{u}_s = R\underline{i}.$$

Nous avons donc :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e \frac{R}{\left(R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)}$$

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e \frac{R}{\left((R + r) + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right)}.$$

Nous avons donc les amplitudes qui sont données par :

$$U_s = \frac{RU_e}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 + (R + r)^2}}.$$

Le déphasage est donné par :

$$\tan \varphi = - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}.$$

Nous avons deux équations et deux inconnues donc nous pouvons résoudre le système.

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 + (R + r)^2 = R^2 \left(\frac{U_e}{U_s} \right)^2$$

$$(R + r)^2 + ((R + r)^2 \tan^2 \varphi) = R^2 \left(\frac{U_e}{U_s} \right)^2$$

$$(R + r)^2 (1 + \tan^2 \varphi) = R^2 \left(\frac{U_e}{U_s} \right)^2.$$

Nous avons :

$$1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

En retirant le carré, il reste :

$$R + r = R \frac{U_e}{U_s} \cos \varphi$$

$$\boxed{r = R \left(\frac{U_e}{U_s} \cos \varphi - 1 \right)}$$

$$\tan \varphi = - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = -(R + r) \tan \varphi$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} - (R + r) \tan \varphi$$

$$L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{(R + r)}{\omega} \tan \varphi$$

$$L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{R \frac{U_e}{U_s} \cos \varphi}{\omega} \tan \varphi$$

$$\boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{RU_e}{\omega U_s} \sin \varphi.}$$

L'application numérique donne :

$$r = 40 \times \left(\frac{10}{5} \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) = 29,3 \, \Omega.$$

$$L = \frac{1}{10 \cdot 10^{-9} \times (2\pi \times 250)^2} - \frac{40 \times 10}{(2\pi \times 250) \times 5} \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 50 \, \text{mH}.$$

Les valeurs trouvées sont compatibles avec les résistances et bobines disponibles au laboratoire.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'analyser le sujet et de donner sa méthode de résolution.

Rapport du jury 2016

Formuler clairement à l'oral la situation étudiée et préciser explicitement la grandeur recherchée. Il faut exposer clairement la démarche envisagée pour répondre à la question posée.

♡ Il faut se souvenir d'extraire correctement le module et la phase d'un nombre complexe.

♡ Il faut se souvenir de la notion de déphasage.

♡ Il faut se souvenir d'exploiter les courbes afin de trouver les données numériques utiles.

Rapport du jury 2016

Extraire depuis les documents associés à l'énoncé (photos, courbes) des informations pertinentes, notamment les valeurs numériques parfois indispensables à la résolution.

Formulaire

- Impédance complexes d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur :

$$Z_R = R ; Z_L = jL\omega ; Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Module et phase d'un nombre complexe $\underline{Z} = a + jb$:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

- Module et phase d'un nombre complexe $\underline{Z} = \frac{1}{a+jb}$:

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{b}{a}.$$

- Déphasage entre deux tensions :

$$u_1 = U_{10} \cos(2\pi ft + \varphi_1)$$

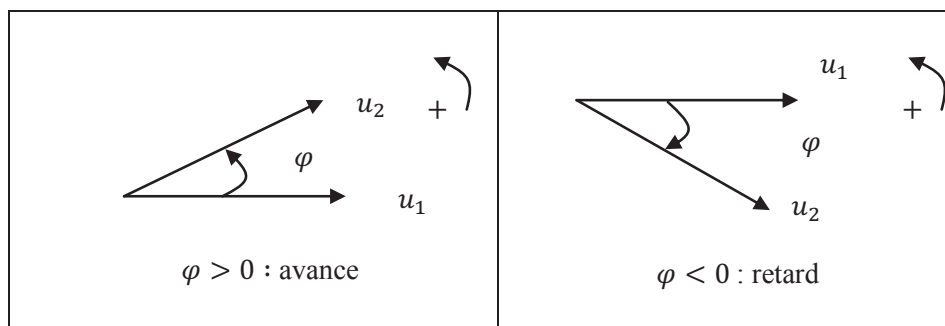
$$u_2 = U_{20} \cos(2\pi ft + \varphi_2)$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

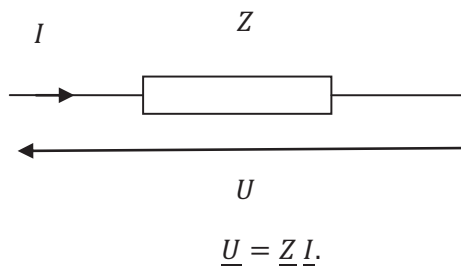
Si $\varphi > 0$, la tension u_2 est en avance sur la tension u_1

Si $\varphi < 0$, la tension u_2 est en retard sur la tension u_1 .

La représentation de Fresnel donne :



- Relation entre la tension et le courant aux bornes d'un dipôle :



Énoncé

On considère un cycle proche du moteur diesel subit par un gaz parfait :

$A \rightarrow B$: compression isentropique

$B \rightarrow C$: combustion isochore

$C \rightarrow D$: combustion isobare

$D \rightarrow E$: détente isentropique

$E \rightarrow A$: détente isochore.

On pose :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} ; \alpha = \frac{V_B}{V_A} ; \beta = \frac{V_D}{V_C} ; \delta = \frac{P_C}{P_B}.$$

- 1) Placer les différents points dans le diagramme de Clapeyron $P = f(V)$.
- 2) Déterminer la pression P_B en fonction de P_A , γ et α .
- 3) Déterminer les différentes températures en fonction de T_A , α , β , γ , δ .
- 4) Donner les expressions et les signes des différents transferts thermiques.
- 5) Déterminer le rendement η du moteur.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur la thermodynamique et en particulier un cycle moteur.

- 1) Il faut placer les points dans le diagramme de Clapeyron.

↪ Bien représenter les différentes transformations. Bien positionner l'isentropique.

- 2) La transformation AB est isentropique.

↪ Utilisez la loi de Laplace.

- 3) Pour cette question, il faut utiliser les propriétés des transformations.

↪ Aucune difficulté.

- 4) Il s'agit de déterminer les transferts thermiques pour les transformations qui ne sont pas isentropiques.

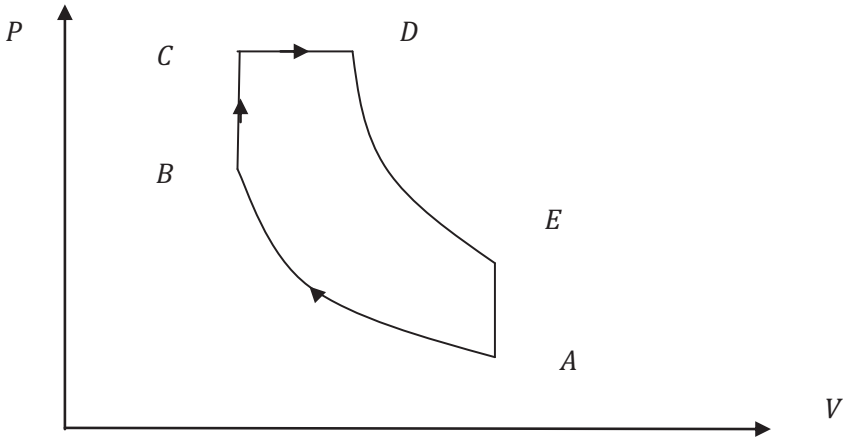
↪ Utiliser le premier principe de la thermodynamique.

- 5) Il faut se souvenir de la définition du rendement pour un moteur.

↪ La connaissance du cours est bien utile. Aller revoir le cours si besoin.

Corrigé

1) On commence par faire un schéma afin de représenter le cycle subi par le fluide :



Les transformations AB et DE sont des transformations adiabatiques qui vérifient la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = Cte.$$

La courbe dans le diagramme est donc de la forme :

$$P = \frac{Cte}{V^\gamma}.$$

La pente de l'adiabatique est supérieure à la pente de l'isotherme.

Le cycle est décrit dans le sens horaire ce qui correspond bien à un cycle moteur. En effet, le travail est ici égal à l'opposé de l'aire du cycle.

2) La transformation AB est une transformation isentropique qui vérifie donc la loi de Laplace soit :

$$PV^\gamma = Cte.$$

Nous avons donc :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

$$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma$$

$$\boxed{P_B = P_A \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\gamma}.$$

3) Pour trouver la température du point B , nous utilisons la loi des gaz parfaits soit :

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B}$$

$$T_B = T_A \frac{P_B V_B}{P_A V_A} = T_A \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\gamma \alpha$$

$$\boxed{T_B = T_A \alpha^{1-\gamma}}.$$

Pour la température du point C , nous avons :

$$T_C = T_B \frac{P_C V_C}{P_B V_B} = T_B \frac{P_C}{P_B}$$

$$\boxed{T_C = T_A \alpha^{1-\gamma} \delta.}$$

Pour le point D , nous avons :

$$T_D = T_C \frac{P_D V_D}{P_C V_C} = T_C \frac{V_D}{V_C}$$

$$\boxed{T_D = T_A \alpha^{1-\gamma} \delta \beta.}$$

Pour le point E , nous avons :

$$T_E = T_A \frac{P_E V_E}{P_A V_A} = T_A \frac{P_E}{P_A}.$$

Il faut donc déterminer la pression de ce point en utilisant la loi de Laplace entre les points D et E soit :

$$P_D V_D^\gamma = P_E V_E^\gamma$$

$$P_E = P_D \left(\frac{V_D}{V_E} \right)^\gamma = P_D \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^\gamma = P_C \left(\frac{V_D V_C}{V_C V_A} \right)^\gamma = \delta P_B (\beta \alpha)^\gamma$$

$$P_E = \delta P_A \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\gamma (\beta \alpha)^\gamma$$

$$P_E = \delta P_A \beta^\gamma.$$

En remplaçant dans l'expression de la température :

$$\boxed{T_E = T_A \delta \beta^\gamma.}$$

4) Les échanges thermiques ont lieu pour les combustions BC et CD et pour la détente EA .

Pour la combustion isochore BC , nous avons d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q_{BC} = n c_v (T_C - T_B)$$

$$Q_{BC} = n c_v (T_A \alpha^{1-\gamma} \delta - T_A \alpha^{1-\gamma})$$

$$Q_{BC} = n c_v T_A \alpha^{1-\gamma} (\delta - 1) > 0.$$

Pour la combustion isobare CD , nous avons d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta H = Q_{CD} = n c_p (T_D - T_C)$$

$$Q_{CD} = n c_v (T_A \alpha^{1-\gamma} \delta \beta - T_A \alpha^{1-\gamma} \delta)$$

$$Q_{CD} = n c_v T_A \alpha^{1-\gamma} \delta (\beta - 1) > 0.$$

Pour la détente isobare, nous avons :

$$\Delta U = Q_{EA} = n c_v (T_A - T_E)$$

$$Q_{EA} = nc_v(T_A - T_A\delta\beta^\gamma)$$

$$Q_{EA} = nc_vT_A(1 - \delta\beta^\gamma) < 0.$$

5) Le rendement du moteur est défini par :

$$\eta = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}}.$$

Le gain correspond au travail fourni par le moteur soit $-W$ qui est l'opposé du travail reçu par le fluide. Les dépenses correspondent aux transferts thermiques reçus par le fluide soit :

$$Q_{BC} + Q_{CD}.$$

Le rendement est donc :

$$\eta = \frac{-W}{Q_{BC} + Q_{CD}}.$$

Il reste à déterminer le travail en utilisant le premier principe de la thermodynamique sur un cycle soit :

$$\Delta U = 0 = W + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}.$$

$$-W = Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}.$$

Nous avons donc :

$$\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

En remplaçant avec les expressions trouvées dans la question précédente, nous obtenons :

$$\eta = 1 + \frac{nc_vT_A(1 - \delta\beta^\gamma)}{nc_vT_A\alpha^{1-\gamma}(\delta - 1) + nc_vT_A\alpha^{1-\gamma}\delta(\beta - 1)}$$

$$\eta = 1 + \frac{(1 - \delta\beta^\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(\delta - 1) + \alpha^{1-\gamma}\delta(\beta - 1)}$$

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{(1 - \delta\beta^\gamma)\alpha^{\gamma-1}}{\beta\delta - 1}}.$$

On vérifie que le rendement est bien inférieur à 1.

Techniques à mémoriser

- ♡ Il faut se souvenir d'utiliser un langage précis et rigoureux.

Rapport du jury 2016

Il y a, pour cette partie, un gros problème de langage : l'expression « variation de quantité de chaleur » revient souvent, ce qui en dit long sur la compréhension de ce qu'est un transfert thermique. On voit souvent apparaître l'énergie interne absolue au lieu de sa variation dans le premier principe, ou des deltas à la place de d.

- ♡ Il faut se souvenir de définir correctement le système.

Rapport du jury 2016

Le « système » est peu souvent identifié au fluide qui subit des cycles dans la machine.

- ♡ Il faut se souvenir que le rendement d'un moteur est inférieur à 1.

- ♡ Il faut se souvenir de l'allure de l'isentrope dans un diagramme de Clapeyron.

Rapport du jury 2016

Les cycles ne sont pas évidents à tracer dans un diagramme de Clapeyron (pente isotherme et adiabatique notamment, des pressions qui augmentent avec le volume...) et les rendements sont difficiles à déterminer.

Formulaire

- Loi du gaz parfait :

$$PV = nRT.$$

- Loi de Laplace pour une transformation isentropique :

$$\begin{aligned}PV^\gamma &= Cte \\ P^{1-\gamma}T^\gamma &= Cte \\ TV^{\gamma-1} &= Cte.\end{aligned}$$

- Premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

$$\Delta U = W + Q.$$

- Premier principe de la thermodynamique pour une transformation isochore :

$$\Delta U = Q.$$

- Premier principe de la thermodynamique pour une transformation isobare :

$$\Delta H = Q.$$

- Rendement du moteur :

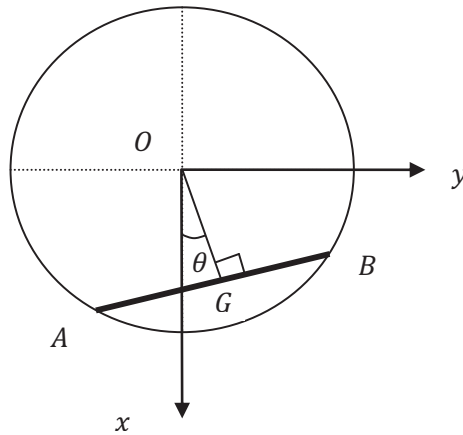
$$\eta = \frac{\textit{gain}}{\textit{dépense}}.$$

Jour n°18

Exercice 18.1

On considère une tige AB de longueur $\frac{2R}{\sqrt{2}}$ qui se déplace sans frottement dans un cercle de rayon R . Son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est égal à :

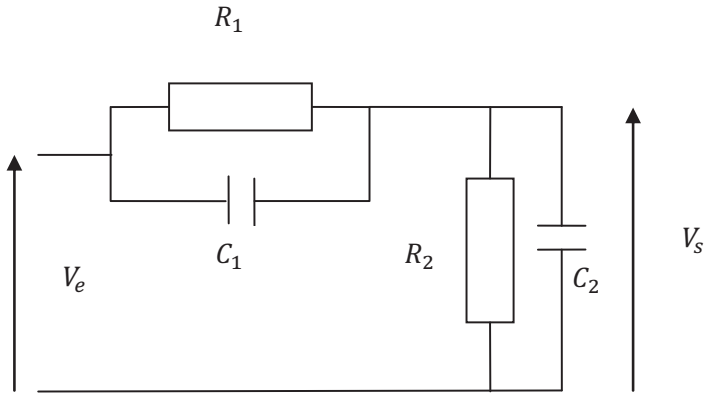
$$J_{Oz} = \frac{2}{3}mR^2.$$



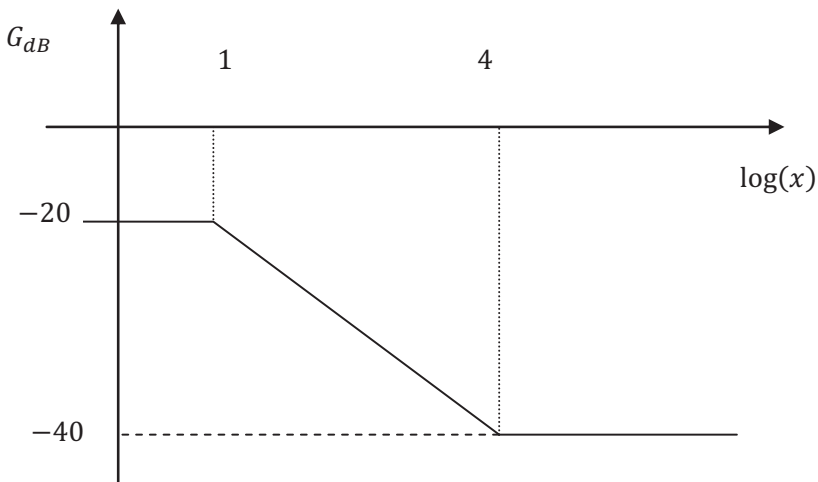
- 1) Déterminer l'énergie cinétique de la tige.
- 2) Déterminer l'énergie potentielle de la tige.
- 3) En déduire l'équation du mouvement de la tige.
- 4) Retrouver cette équation à l'aide du théorème du moment cinétique.
- 5) Déterminer la période des petites oscillations.

Exercice 18.2

On étudie le filtre suivant :



Le diagramme de Bode asymptotique est le suivant :



On pose :

$$f_0 = 10 \text{ Hz} ; x = \frac{f}{f_0}.$$

On a :

$$R_1 = 90 \text{ k}\Omega ; C_1 = 10 \text{ nF}.$$

- 1) Déterminer R_2 et C_2 en utilisant les équivalents en haute et basse fréquences.
- 2) Quel est le comportement du filtre entre 10 Hz et 10 kHz ?
- 3) En entrée, on envoie un signal périodique $V_e(t)$ qui ne contient que les deux premières harmoniques dont les amplitudes respectives sont 6 V et 4 V.

Déterminer le signal de sortie $V_s(t)$ sachant que la fréquence est égale à 2 Hz.

4) On envoie maintenant le signal suivant :

$$V_e(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t) + 10 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec :

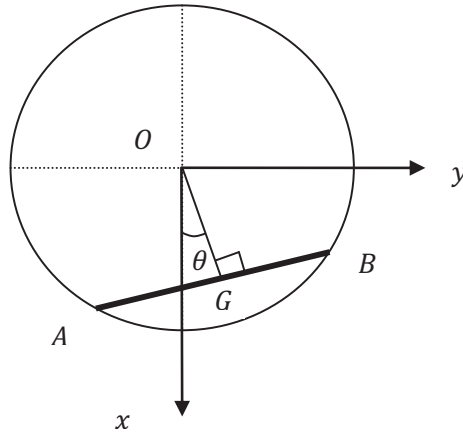
$$f_1 = 100 \text{ kHz et } f_2 = 1000 \text{ kHz.}$$

Déterminer le signal de sortie.

Énoncé

On considère une tige AB de longueur $\frac{2R}{\sqrt{2}}$ qui se déplace sans frottement dans un cercle de rayon R . Son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est égal à :

$$J_{Oz} = \frac{2}{3}mR^2.$$



- 1) Déterminer l'énergie cinétique de la tige.
- 2) Déterminer l'énergie potentielle de la tige.
- 3) En déduire l'équation du mouvement de la tige.
- 4) Retrouver cette équation à l'aide du théorème du moment cinétique.
- 5) Déterminer la période des petites oscillations.

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un exercice de mécanique du solide.

- 1) Cette question ne pose pas de difficulté si l'on connaît son cours.

↪ Appliquer la définition de l'énergie cinétique d'un solide en fonction de son moment cinétique.

- 2) Pour déterminer simplement l'énergie potentielle de pesanteur, il est utile d'utiliser le centre d'inertie.

↪ Attention à la direction de l'axe vertical.

- 3) Pour trouver l'équation du mouvement, il faut utiliser les deux premières questions.

↪ Remarquer que le système est conservatif.

4) Il faut retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

↪ Remarquer que les forces de contact donnent un moment cinétique nul.

5) C'est une question classique où l'on retrouve l'oscillateur harmonique.

↪ Penser à utiliser le fait que l'angle reste petit et faire un développement limité à l'ordre 1 du $\sin \theta$.

Corrigé

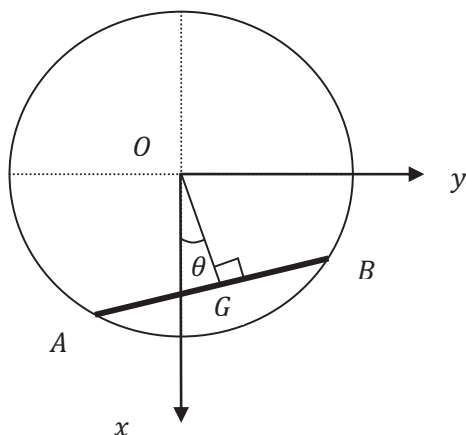
1) L'énergie cinétique de la tige est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{3} m R^2 \dot{\theta}^2.$$

2) L'énergie potentielle de pesanteur de la tige est égale avec l'axe dirigé vers le bas et en prenant l'origine en $x = 0$ à :

$$E_p = -mgx_G.$$



On a :

$$x_G = OG \cos \theta.$$

En utilisant le triangle rectangle OAG , nous avons :

$$OA^2 = AG^2 + GO^2$$

$$OA = R$$

$$AG = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$OG = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

L'énergie potentielle est donc égale à :

$$E_p = -mg \frac{R}{\sqrt{2}} \cos \theta.$$

- 3) Le système est constitué par la tige et son mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Il n'y a pas de frottements au niveau des contacts entre la tige et le cerceau donc le système est conservatif et l'énergie mécanique est constante soit :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}^2 - mg \frac{R}{\sqrt{2}} \cos \theta = Cte.$$

Il reste donc à dériver l'équation afin d'obtenir l'équation du mouvement :

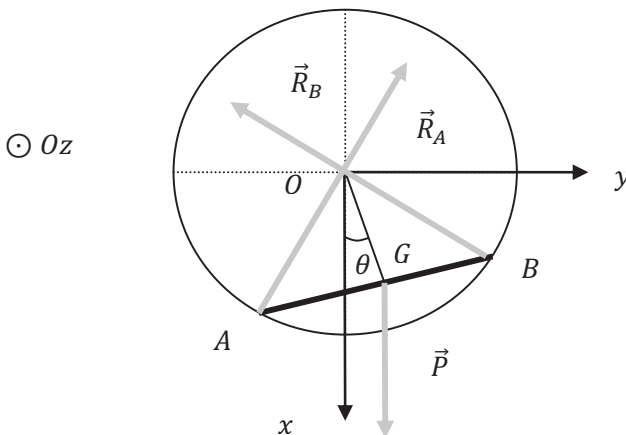
$$\frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg \frac{R}{\sqrt{2}} \dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

En simplifiant, il reste :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2R\sqrt{2}} \sin \theta = 0.$$

Nous pouvons remarquer que le terme $\frac{g}{R}$ est homogène à l'inverse d'un temps au carré.

- 4) Nous appliquons maintenant le théorème du moment cinétique à la tige. Nous sommes toujours dans le référentiel galiléen. Les actions mécaniques sont le poids appliqué en G et les actions de contact en A et B qui sont perpendiculaires au support.



Le moment des forces de contact par rapport à O est nul. Il n'y a que le moment du poids à calculer. Nous avons en appliquant le théorème du moment cinétique au point O :

$$J\ddot{\theta}\vec{e}_z = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

$$J\ddot{\theta}\vec{e}_z = -OG \, mg \, \sin \theta \, \vec{e}_z.$$

Soit en projection sur l'axe Oz :

$$J\ddot{\theta} = -OG \, mg \, \sin \theta$$

$$\frac{2}{3}mR^2\ddot{\theta} = -\frac{mgR}{\sqrt{2}} \sin \theta.$$

En simplifiant, nous retrouvons bien la même équation que celle obtenue avec l'énergie mécanique :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2R\sqrt{2}} \sin \theta = 0.$$

5) Dans le cas de petits mouvements, l'angle θ est petit et nous pouvons utiliser le développement limité du sinus au premier ordre soit :

$$\sin \theta \approx \theta.$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2R\sqrt{2}} \theta = 0.$$

Nous retrouvons l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2R\sqrt{2}}}.$$

La période des petites oscillations est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2R\sqrt{2}}{3g}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'expression de l'énergie cinétique pour un solide.

♡ Il faut se souvenir du théorème du moment cinétique pour un solide.

- ♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les forces.

Rapport du jury 2017

Beaucoup de candidats font des erreurs de projection des forces et ne savent pas calculer le travail du poids.

- ♡ Il faut de déterminer correctement l'énergie potentielle de pesanteur.

Rapport du jury 2017

Les candidats doivent connaître sans hésitation l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel, suivant que l'axe vertical est ascendant ou descendant.

Formulaire

- Énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2.$$

- Énergie potentielle de pesanteur lorsque l'axe Oz est vertical descendant :

$$E_p = -mgz_G + Cte.$$

- Moment d'une force qui s'applique en A par rapport au point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}.$$

- Théorème du moment cinétique appliqué en A par rapport au point O :

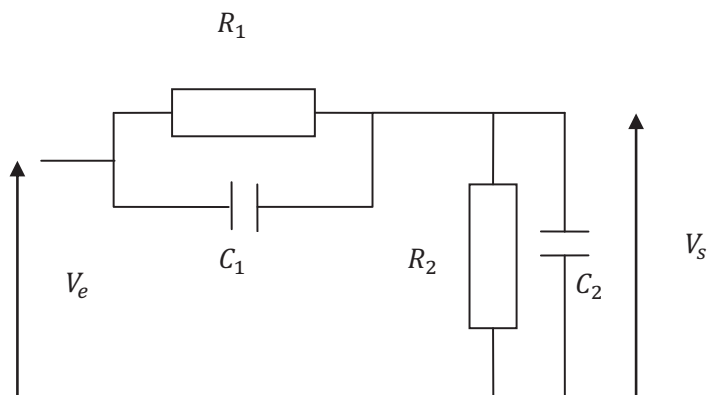
$$J \ddot{\theta} \vec{e}_z = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O}.$$

- Équation de l'oscillateur harmonique de pulsation ω :

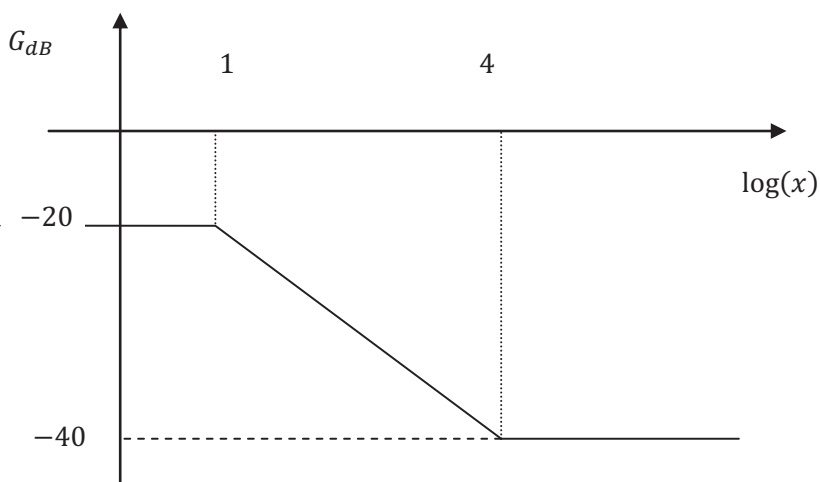
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0.$$

Énoncé

On étudie le filtre suivant :



Le diagramme de Bode asymptotique est le suivant :



On pose :

$$f_0 = 10 \text{ Hz} ; x = \frac{f}{f_0}.$$

On a :

$$R_1 = 90 \text{ k}\Omega ; C_1 = 10 \text{ nF}.$$

- 1) Déterminer R_2 et C_2 en utilisant les équivalents en haute et basse fréquences.
- 2) Quel est le comportement du filtre entre 10 Hz et 10 kHz ?

- 3) En entrée, on envoie un signal périodique $V_e(t)$ qui ne contient que les deux premières harmoniques dont les amplitudes respectives sont 6 V et 4 V. Déterminer le signal de sortie $V_s(t)$ sachant que la fréquence est égale à 2 Hz.
- 4) On envoie maintenant le signal suivant :

$$V_e(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t) + 10 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec :

$$f_1 = 100 \text{ kHz et } f_2 = 1000 \text{ kHz.}$$

Déterminer le signal de sortie.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur l'étude d'un filtre en régime sinusoïdal forcé.

- 1) Pour cette question, il faut déterminer la fonction de transfert en haute et en basse fréquences.

↪ Utiliser le schéma équivalent du condensateur en haute et en basse fréquences.

- 2) Pour cette question, il s'agit d'utiliser le diagramme de Bode fourni.

↪ C'est un diagramme tracé en échelle logarithmique.

- 3) Il s'agit maintenant de déterminer le signal de sortie pour une tension d'entrée donnée qui comporte deux fréquences qui correspondent aux deux premières harmoniques.

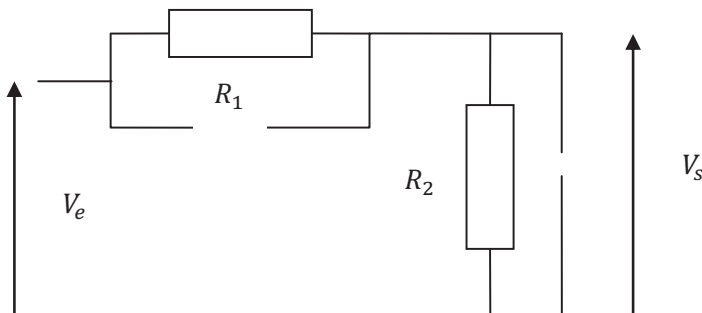
↪ Utiliser le théorème de superposition et le diagramme de Bode.

- 4) Il s'agit maintenant de déterminer le signal de sortie pour une tension d'entrée donnée qui comporte deux fréquences plus élevées.

↪ Utiliser le théorème de superposition et le diagramme de Bode.

Corrigé

- 1) Nous commençons par chercher l'équivalent du filtre en base fréquence. Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Nous avons donc le schéma suivant :



Nous avons donc affaire à un diviseur de tension. La fonction de transfert est donc égale à :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

En utilisant le diagramme, nous lisons que le gain en décibel est égal à -20 dB soit :

$$-20 = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

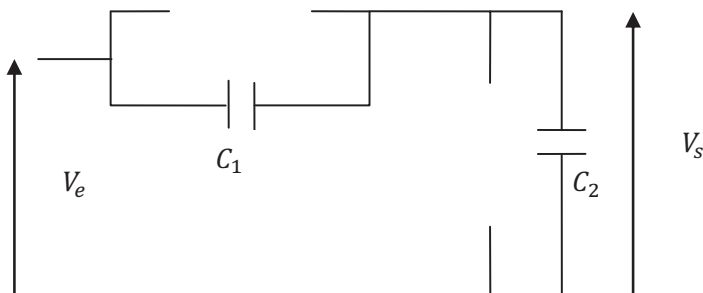
$$\log \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = -1$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,1$$

$$10R_2 = R_1 + R_2$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_1}{9} = 10 \text{ k}\Omega.}$$

En haute fréquence, le condensateur est équivalent à un court-circuit. Dans ce cas l'impédance du condensateur est bien plus faible que celle des résistances. Le courant passant dans les résistances devient négligeable et le schéma équivalent devient le suivant :



Nous obtenons encore un diviseur de tension dont la fonction de transfert est la suivante :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}}$$

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

En utilisant le diagramme, nous lisons que le gain en décibel est égal à -40 dB soit :

$$-40 = 20 \log \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)$$

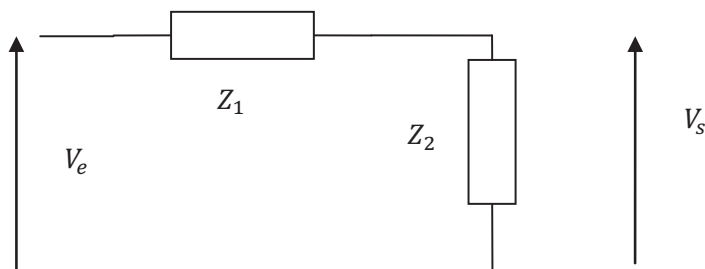
$$\log \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) = -2$$

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0,01$$

$$100C_1 = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_2 = (100 - 1)C_1 = 990 \text{ nF.}}$$

- 2) Entre 10 Hz et 10 kHz, le filtre atténue le signal. Nous pouvons calculer la fonction de transfert. Nous avons le schéma équivalent suivant :



Nous avons encore un diviseur de tension. La fonction de transfert est donc égale à :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}$$

Comme les impédances sont en parallèles, nous avons les impédances équivalentes qui sont égales à :

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega$$

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} \right) \left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega \right)}$$

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega + \frac{R_1}{R_2} + jR_1C_2\omega}.$$

Nous pouvons vérifier sur cette expression que l'on retrouve bien les limites déterminées à la question précédente en basse et haute fréquences.

Lorsque la pulsation tend vers 0, nous retrouvons :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

Lorsque la pulsation tend vers l'infini, nous retrouvons :

$$\begin{aligned}\frac{V_S}{V_E} &= \frac{jR_1C_1\omega}{jR_1C_1\omega + jR_1C_2\omega} \\ \frac{V_S}{V_E} &= \frac{C_1}{C_1 + C_2}.\end{aligned}$$

3) Commençons par écrire l'expression du signal d'entrée :

$$V_e(t) = 6 \cos(4\pi t) + 4 \cos(8\pi t).$$

Les deux fréquences se situent dans la zone où l'amplitude est maximale et vaut -20 dB. Nous avons donc la relation suivante sur les amplitudes :

$$\begin{aligned}20 \log \frac{V_S}{V_E} &= -20 \\ \frac{V_S}{V_E} &= 0,1.\end{aligned}$$

Comme la fonction de transfert est réelle pour les basses fréquences, le déphasage est nul.

Le signal de sortie est donc égal à :

$$\boxed{V_s(t) = 0,1V_e(t) = 0,6 \cos(4\pi t) + 0,4 \cos(8\pi t).}$$

4) Commençons par écrire l'expression du signal d'entrée :

$$V_e(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t) + 10 \cos(2\pi f_2 t).$$

Les deux fréquences se situent dans la zone où l'amplitude est minimale et vaut -40 dB. Nous avons donc la relation suivante sur les amplitudes :

$$\begin{aligned}20 \log \frac{V_S}{V_E} &= -40 \\ \frac{V_S}{V_E} &= 0,01.\end{aligned}$$

Comme la fonction de transfert est réelle pour les hautes fréquences, le déphasage est nul.

Le signal de sortie est donc égal à :

$$V_s(t) = 0,01V_e(t) = 0,1 \cos(2\pi f_1 t) + 0,1 \cos(2\pi f_2 t).$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement les nombre complexes.

Rapport du jury 2017

Les candidats ont beaucoup de difficultés avec les outils mathématiques (résolution des équations différentielles, passage complexe/réel, introduction inutile d'inconnues dans les équations), la réalisation des schémas et représentations graphiques est – trop souvent – rudimentaire et clairement sous-exploitée..

♡ Il faut se souvenir des comportements en haute et en basse fréquences du condensateur.

Rapport du jury 2016

Les dipôles de base (conducteur ohmique, condensateur et bobine) représentent des situations physiques dont la connaissance doit permettre une analyse et une interprétation du comportement des réseaux ; les modèles équivalents dans des situations limites doivent être parfaitement sus pour une bonne approche qualitative du système et des calculs conduits de manière dirigée et aboutie.

♡ Il faut se souvenir du diviseur de tension.

Rapport du jury 2017

Le diviseur de tension n'est pas systématiquement utilisé quand c'est possible.

♡ Il faut se souvenir que l'on peut appliquer le théorème de superposition pour un système linéaire.

Formulaire

- Impédance d'un résistor :

$$Z_R = R.$$

- Impédance d'un condensateur :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}.$$

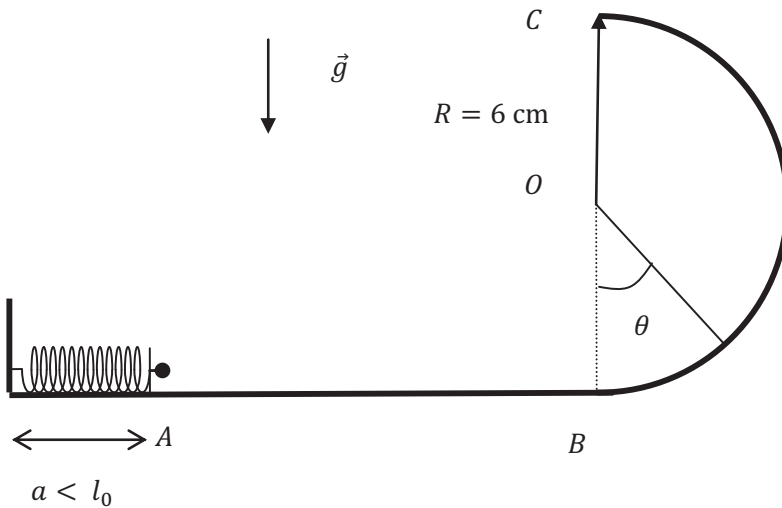
- Gain en décibel :

$$g_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|.$$

Jour n°19

Exercice 19.1

Une bille, considérée comme ponctuelle, de masse $m = 8 \text{ g}$ se déplace sans frottement sur une piste. Elle est lancée grâce à un ressort de raideur $k = 15 \text{ N.m}^{-1}$. La longueur à vide du ressort est égale à $l_0 = 10 \text{ cm}$.



- 1) Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires pour le mouvement circulaire.
- 2) Montrer que pour ne pas avoir de décollement sur la piste circulaire, il faut que le module de la vitesse vérifie la condition suivante :

$$v^2 > -gR \cos \theta.$$

- 3) Justifier que l'énergie mécanique est conservée pour le système masse ressort. Montrer que $V_A > V_{A \min}$ et calculer $V_{A \min}$.
- 4) Relier V_A à a et montrer que $a < a_{\max}$ pour que la masse ne décolle pas dans la courbe. Calculer $a_{\max}$.
- 5) Déterminer l'allure de la trajectoire après que la masse a atteint le point C.

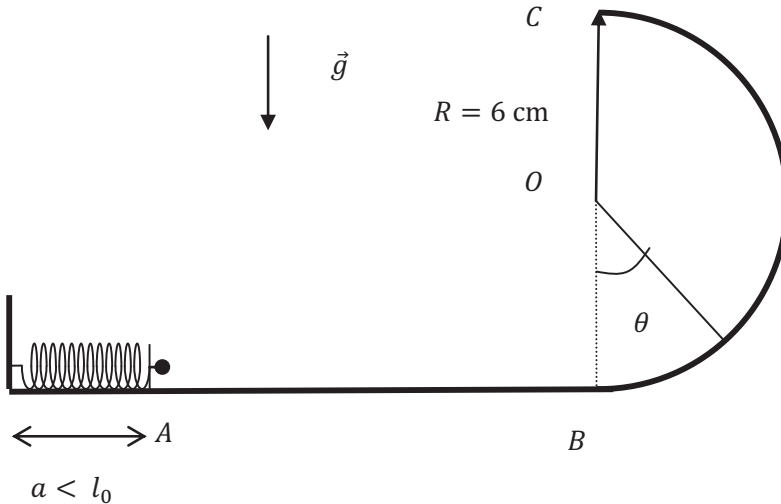
Exercice 19.2

On considère un signal périodique $e(t)$ de fréquence fondamentale $f_0 = 100$ Hz, de valeur moyenne 2 V. Il comporte deux harmoniques : pour $n = 1$, une amplitude de 0,5 V et pour $n = 3$ une amplitude de 0,2 V. Les autres harmoniques sont nulles.

- 1) Donner l'expression de $e(t)$.
- 2) Tracer son spectre en amplitude.
- 3) Quelles valeurs peut-on donner au filtre passe-bas RC pour ne conserver que le continu ?

Énoncé

Une bille, considérée comme ponctuelle, de masse $m = 8 \text{ g}$ se déplace sans frottement sur une piste. Elle est lancée grâce à un ressort de raideur $k = 15 \text{ N.m}^{-1}$. La longueur à vide du ressort est égale à $l_0 = 10 \text{ cm}$.



- 1) Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires pour le mouvement circulaire.
- 2) Montrer que pour ne pas avoir de décollement sur la piste circulaire, il faut que le module de la vitesse vérifie la condition suivante :

$$v^2 > -gR \cos \theta.$$

- 3) Justifier que l'énergie mécanique est conservée pour le système masse ressort. Montrer que $V_A > V_{A \min}$ et calculer $V_{A \min}$.
- 4) Relier $V_{A \min}$ à a et montrer que $a < a_{\max}$ pour que la masse ne décolle pas dans la courbe. Calculer $a_{\max}$.
- 5) Déterminer l'allure de la trajectoire après que la masse a atteint le point C .

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur la mécanique du point.

- 1) Cette première question est une question de cours.

↪ Retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération à partir du vecteur position.

2) Nous cherchons une condition de non décollement de la masse ponctuelle lorsqu'elle est dans la partie circulaire.

↪ Penser à déterminer la réaction du support en utilisant la deuxième loi de Newton.

3) L'énoncé indique que le mouvement s'effectue sans frottement.

↪ Aucune difficulté.

4) Il faut maintenant utiliser le système masse ressort afin de déterminer la relation entre la vitesse de la masse et la compression du ressort.

↪ Penser à utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

5) Lorsque la masse ponctuelle arrive au point C, elle n'est plus en contact avec le support. Nous avons donc affaire à un mouvement de chute libre si l'on néglige les frottements de l'air.

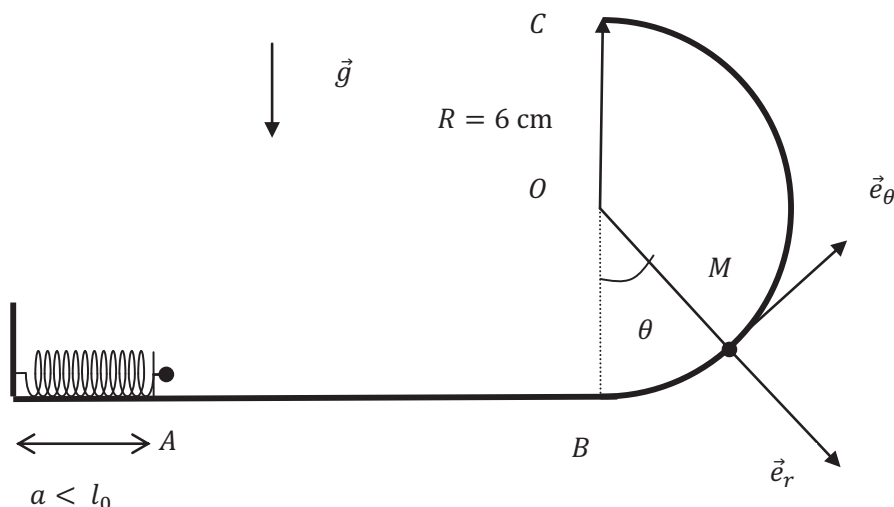
↪ Discuter en fonction des conditions à l'instant où la masse arrive au point C.

Corrigé

1) Pour déterminer la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires, nous repartons du vecteur position soit :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r.$$

Nous avons le schéma suivant :



La vitesse pour le mouvement circulaire vaut :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

L'accélération est égale à :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

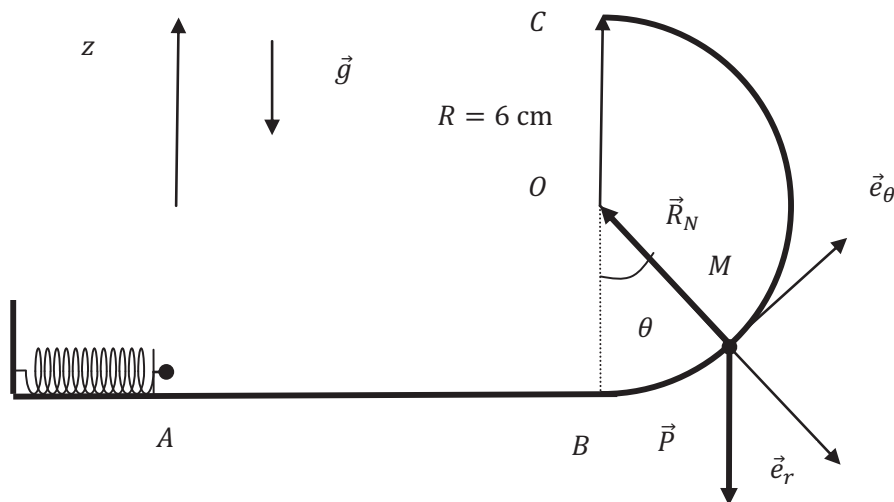
Cette question ne doit pas poser de problème. Si vous ne connaissez pas ces relations, il est urgent de revoir le cours de cinématique.

2) Nous étudions maintenant le mouvement sur la partie circulaire de la piste.

Le système est constitué par la masse ponctuelle. Nous travaillons dans le référentiel du laboratoire qui est galiléen.

La masse ponctuelle est soumise au poids $\vec{P}$ et à la force de contact $\vec{R}_N$ avec la piste qui est normale car il n'y a pas de frottement.

Nous pouvons représenter ces forces sur le schéma :



L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

$$m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = m\vec{g} - R_N\vec{e}_r.$$

Nous avons :

$$\vec{g} = g \cos \theta \vec{e}_r - g \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

Les projections de cette relation vectorielle sur les vecteurs polaires donne deux équations scalaires :

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - R_N$$

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Nous pouvons donc en déduire l'expression de la réaction :

$$R_N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2.$$

Pour que la masse reste en contact avec la piste, il faut que :

$$R_N > 0.$$

Cette condition est équivalente à :

$$mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 > 0.$$

Le module de la vitesse est égal à

$$v = R\dot{\theta}.$$

La condition s'écrit donc en fonction de la vitesse :

$$g \cos \theta + R \frac{v^2}{R^2} > 0$$

$$\boxed{v^2 > -gR \cos \theta.}$$

Cette condition doit être vérifiée pour toutes les valeurs de l'angle θ qui varie entre 0 et π . La vitesse doit toujours être supérieure à la valeur maximale soit :

$$v^2 > gR.$$

3) Comme la masse ponctuelle se déplace sans frottement, la force de contact ne travaille pas. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Nous avons donc affaire à un système conservatif.

L'énergie potentielle de pesanteur est donnée pour un axe vertical ascendant par :

$$E_p = mgz.$$

En utilisant les coordonnées polaires et en prenant l'origine de l'énergie potentielle au point B , c'est-à-dire pour $z = -R$, nous obtenons :

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta).$$

L'énergie potentielle est donc maximale lorsque la masse ponctuelle se trouve au point C .

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Au point B , l'énergie mécanique, sachant que $V_B = V_A$, vaut :

$$E_m = \frac{1}{2}mV_A^2 + 0.$$

Au point C , l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = \frac{1}{2}mV_C^2 + 2mgR.$$

Comme il y a conservation de l'énergie mécanique, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_C^2 + 2mgR.$$

La condition pour que la masse ne décolle pas est :

$$V_C^2 > gR.$$

Nous avons donc :

$$V_A^2 = V_C^2 + 4gR > 5gR.$$

Nous trouvons donc que :

$$\boxed{V_{Amin} = \sqrt{5gR}.}$$

4) L'énergie cinétique acquise par la masse ponctuelle est fournie par le ressort. Nous avons, en considérant le système masse ressort, un système conservatif.

L'énergie potentielle élastique du ressort est en prenant l'origine lorsque le ressort a sa longueur à vide :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.$$

L'énergie potentielle de pesanteur est conservée car la hauteur reste constante.

L'énergie mécanique vaut dans l'état initial où la vitesse est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}k(a - l_0)^2 + 0.$$

L'énergie mécanique vaut lorsque la masse est éjectée :

$$E_m = \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 + \frac{1}{2}mV_A^2.$$

Nous obtenons par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}k(a - l_0)^2 = \frac{1}{2}mV_A^2$$

$$\boxed{V_A = |a - l_0| \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

Comme le ressort est comprimé, nous avons donc :

$$V_A = (l_0 - a) \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La vitesse doit être supérieure à $\sqrt{5gR}$ pour que la masse ne décolle pas, soit :

$$(l_0 - a) \sqrt{\frac{k}{m}} > \sqrt{5gR}$$

$$(l_0 - a) > \sqrt{\frac{5mgR}{k}}$$

$$a < l_0 - \sqrt{\frac{5mgR}{k}}.$$

Nous en déduisons la valeur de a_{max} qui est :

$$a_{max} = l_0 - \sqrt{\frac{5mgR}{k}}.$$

L'application numérique donne :

$$a_{max} = 0,1 - \sqrt{\frac{5 \times 8 \cdot 10^{-3} \times 9,8 \times 0,06}{15}} = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}.$$

Il faut donc que le ressort ait une longueur inférieure à 6 cm pour que le point ne décolle pas.

5) Lorsque la masse arrive au point C, sa vitesse est horizontale et la masse n'est plus soumise qu'au poids. La masse a donc à partir de cet instant un mouvement de chute libre. La deuxième loi de Newton appliquée à la masse ponctuelle sans tenir compte des frottements de l'air donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g}.$$

En intégrant une première fois et en simplifiant par la masse, nous obtenons :

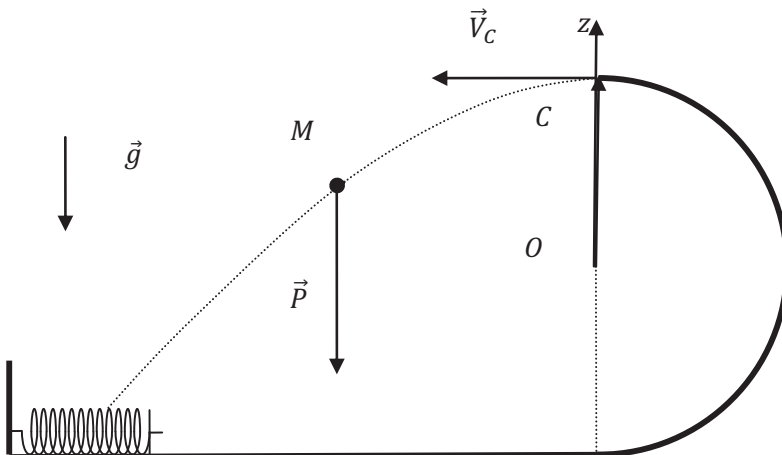
$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{V}_C.$$

En intégrant une seconde fois, nous obtenons le vecteur position qui est :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_Ct + R\vec{e}_z.$$

La trajectoire est donc une parabole de sommet le point C.

Nous pouvons dessiner l'allure de la trajectoire :



Techniques à mémoriser

- ♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les forces grâce à un schéma.

Rapport du jury 2006

Les schémas sont toujours les bienvenus et constituent une bonne base de travail.

- ♡ Il faut se souvenir des théorèmes énergétiques.

Rapport du jury 2016

Pour déterminer une altitude maximale atteinte (pour un mouvement vertical dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement), aucun candidat n'a pensé à utiliser un raisonnement énergétique, qui est pourtant bien plus efficace.

- ♡ Il faut se souvenir que c'est la force de contact qui permet de savoir s'il y a décolllement.

- ♡ Il faut se souvenir de bien analyser le sujet et de vérifier l'homogénéité des résultats.

Rapport du jury 2011

Il faut bien garder à l'esprit que l'épreuve orale de physique ne se résume pas à une suite de calculs. Toute solution doit être précédée d'une analyse physique qualitative. L'interprétation physique des résultats revêt également une importance particulière. Le candidat doit toujours avoir un regard critique sur les résultats obtenus. Beaucoup d'erreurs pourraient être évitées en vérifiant l'homogénéité des formules et en ayant en tête quelques ordres de grandeur.

Formulaire

- Vitesse et accélération en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

- Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

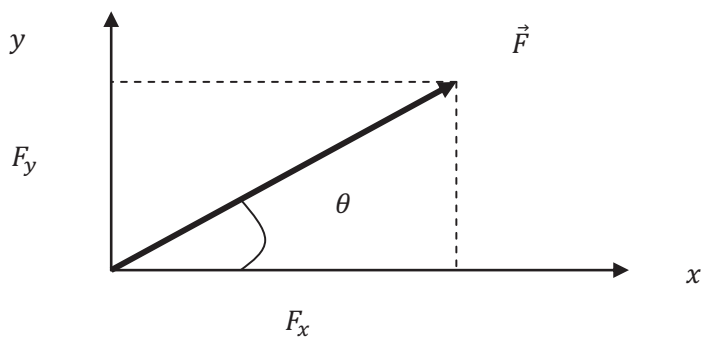
- Énergie potentielle de pesanteur avec un axe vertical ascendant :

$$E_p = mgz + Cte.$$

- Énergie potentielle élastique du ressort :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k(x - l_0)^2 + Cte.$$

- Projection d'une force :



$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta.$$

Énoncé

On considère un signal périodique $e(t)$ de fréquence fondamentale $f_0 = 100$ Hz, de valeur moyenne 2 V. Il comporte deux harmoniques : pour $n = 1$, une amplitude de 0,5 V et pour $n = 3$ une amplitude de 0,2 V. Les autres harmoniques sont nulles.

- 1) Donner l'expression de $e(t)$.
- 2) Tracer son spectre en amplitude.
- 3) Quelles valeurs peut-on donner au filtre passe-bas RC pour ne conserver que le continu ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice portant sur les signaux vus en première année.

- 1) Cette première question est assez simple et il faut donc bien lire l'énoncé.

↪ Écrire les trois termes du signal.

- 2) Il faut connaître la définition du spectre.

↪ On représente des barres dont la hauteur est proportionnelle à l'amplitude en fonction de la fréquence.

- 3) Il faut reprendre le filtre passe-bas. Retrouver sa fonction de transfert et déterminer sa fréquence de coupure.

↪ La fréquence de coupure doit être inférieure à la fréquence du fondamental.

Corrigé

- 1) Le signal est donc égal à la somme de trois termes représentant le signal continu et les deux harmoniques :

$$e = 2 + 0,5 \cos \omega t + 0,2 \cos 3\omega t.$$

On a posé :

$$\omega = 2\pi f_0.$$

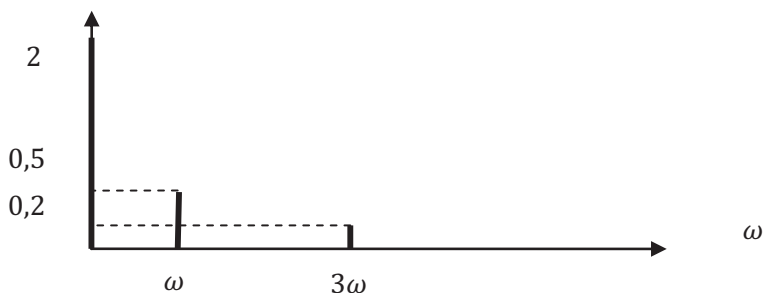
Le signal est donc égal à :

$$e = 2 + 0,5 \cos 2\pi f_0 t + 0,2 \cos 6\pi f_0 t.$$

En remplaçant par la valeur de la fréquence, on a :

$$e = 2 + 0,5 \cos 200\pi t + 0,2 \cos 600\pi t.$$

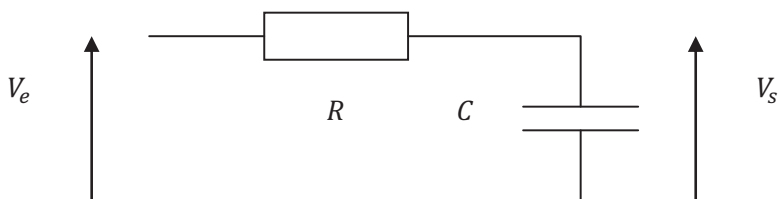
2) Le spectre a donc l'allure suivante :



3) Pour obtenir un signal continu, il faut donc couper les deux composantes de fréquence f_0 et $3f_0$.

Donc la fréquence de coupure du filtre RC doit être inférieure à f .

On reprend le filtre passe-bas RC qui a l'allure suivante :



On pose :

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega}.$$

On a donc un diviseur de tension et la fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{Z_c}{R + Z_c}.$$

Il est préférable de diviser par Z_c afin de simplifier l'expression qui devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{R}{Z_c} + 1}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Le module de la fonction de transfert est donc égal à :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

On vérifie bien que c'est un filtre passe-bas en regardant les limites. En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert on a donc $V_s = V_e$. Ceci correspond donc à $H = 1$.

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, donc un court-circuit. La tension de sortie est donc nulle et la fonction de transfert tend donc bien vers 0.

La pulsation de coupure est définie par :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

On a donc ici une pulsation maximale qui vaut : $H_{max} = 1$.

La pulsation de coupure vérifie donc la relation suivante :

$$\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2} = \sqrt{2}.$$

On a donc :

$$RC\omega_c = 1.$$

La fréquence de coupure est donc égale à :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$
$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

On doit donc avoir :

$$\frac{1}{2\pi RC} < f_0$$

soit :

$$RC > \frac{1}{2\pi f_0}.$$

L'application numérique donne :

$$RC > \frac{1}{2\pi \times 100} = 16.10^{-4} \text{ s.}$$

On peut prendre par exemple :

$$C = 100 \text{ nF}$$

$$R = 100 \text{ k}\Omega.$$

On vérifie le résultat :

$$RC = 10^5 \times 100.10^{-9} = 10^{-2} \text{ s.}$$

La condition est donc vérifiée.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de savoir écrire un signal électrique grâce à ses harmoniques.

♡ Il faut se souvenir de ce que représente le spectre d'amplitude.

♡ Il faut se souvenir du filtre passe-bas RC et de ses caractéristiques.

Rapport du jury 2016

L'exploitation d'un diagramme de Bode ou de l'enregistrement d'un régime transitoire n'est que rarement bien menée. Il est pourtant attendu d'un candidat qu'il sache déterminer les grandeurs caractéristiques d'un filtre (facteur de qualité, pulsation propre...) à partir de l'exploitation d'un diagramme de Bode.

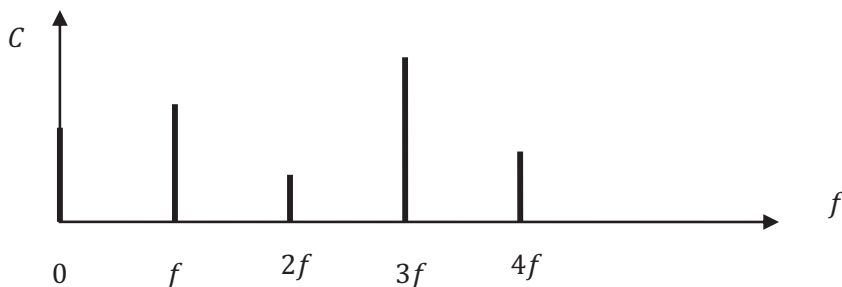
Formulaire

- Décomposition du signal périodique en fonction de ses harmoniques :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- Spectre :

C'est le graphe qui représente une barre de hauteur C_n en fonction de la pulsation ou de la fréquence.



- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}.$$

- Pulsation de coupure :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Jour n°20

Exercice 20.1

On considère un cylindre de longueur $L = 1$ m séparé en deux parties égales A et B par une paroi fixe, diathermane et de surface $S = 1$ m².

Le cylindre est initialement vide. On injecte 180 g d'eau dans le compartiment A et 1800 g d'eau dans le compartiment B . La température initiale du cylindre est égale à 100 °C. On augmente la température du cylindre qui passe à 150 °C et on attend que l'équilibre s'établisse.

Déterminer le transfert thermique reçu par le système.

Données :

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100 °C :

$$l_{vap,eau}(100\text{ °C}) = 2265 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 150 °C :

$$l_{vap,eau}(150\text{ °C}) = 2100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pression de vapeur saturante de l'eau à 150 °C :

$$P_{sat}(150\text{ °C}) = 5 \text{ bar}$$

Capacité thermique massique de l'eau liquide :

$$c_l = 4185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Capacité thermique massique de l'eau gazeuse à pression constante :

$$c_p = 2010 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Exercice 20.2

Un satellite est, tout d'abord, acheminé en altitude à l'aide d'une fusée au point S_0 .

À l'instant $t = t_0$, on lui communique une vitesse $\vec{V}_0$.

L'angle de lancement est défini par l'angle entre $\vec{V}_0$ et la normale à la droite TS_0 .

Ici l'angle de lancement est nul.

T correspond au centre de la Terre.

- 1) Quelle est l'énergie potentielle du satellite à l'instant $t = t_0$?
- 2) Quelles sont les conséquences d'un angle de lancement nul ?
- 3) Donner la constante des aires.
- 4) Quelle est l'énergie cinétique à fournir au satellite pour qu'il ait une trajectoire circulaire de rayon r_0 ?
- 5) Déterminer l'altitude du satellite et sa vitesse pour qu'il soit géostationnaire sachant que la masse de la Terre est égale à $6 \cdot 10^{24}$ kg, que son rayon vaut 6400 km et que la constante de gravitation est égale à $6.67 \cdot 10^{-11}$ uSI.

Énoncé

On considère un cylindre de longueur $L = 1$ m séparé en deux parties égales A et B par une paroi fixe, diathermane et de surface $S = 1$ m².

Le cylindre est initialement vide. On injecte 180 g d'eau dans le compartiment A et 1800 g d'eau dans le compartiment B . La température initiale du cylindre est égale à 100 °C. On augmente la température du cylindre qui passe à 150 °C et on attend que l'équilibre s'établisse.

Déterminer le transfert thermique reçu par le système.

Données :

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100 °C :

$$l_{vap,eau}(100\text{ °C}) = 2265 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 150 °C :

$$l_{vap,eau}(150\text{ °C}) = 2100 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Pression de vapeur saturante de l'eau à 150 °C :

$$P_{sat}(150\text{ °C}) = 5 \text{ bar}$$

Capacité thermique massique de l'eau liquide :

$$c_l = 4185 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Capacité thermique massique de l'eau gazeuse à pression constante :

$$c_p = 2010 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de thermodynamique avec changement d'état.

Il faut commencer par définir le système étudié et caractériser les états : initial et final du système.

Il faut donc se poser la question de savoir si, dans chaque compartiment, l'eau est à l'état liquide, gazeux ou s'il y a un équilibre diphasique liquide-gaz.

Les transferts thermiques sont donnés par application du premier principe de la thermodynamique au système fermé étudié. Remarquez que les volumes occupés sont constants.

↪ Il est quasiment sûr que les deux compartiments vont avoir des comportements différents. On fera l'hypothèse que la phase gazeuse se comporte comme un gaz parfait.

Corrigé

Le système étudié sera composé des deux compartiments du cylindre et de l'eau qu'ils contiennent.

Commençons par déterminer la masse d'eau minimale qu'il faudrait introduire dans chaque compartiment afin d'obtenir un mélange liquide-gaz.

Dans ce cas, la pression serait égale à la pression de vapeur saturante et la masse de liquide serait à la limite de l'équilibre liquide-gaz nulle.

Nous aurions donc :

$$P_{sat}V = nRT = \frac{m}{M}RT.$$

La masse minimale est donc :

$$m_{min} = \frac{MP_{sat}V}{RT} = \frac{MP_{sat}Sl}{RT}.$$

À la température initiale de 100 °C, nous obtenons :

$$m_{min} = \frac{18.10^{-3} \times 10^5 \times 1 \times 1}{8,314 \times 373} = 0,580 \text{ kg} = 580 \text{ g}.$$

À la température finale de 150 °C, nous obtenons :

$$m_{min} = \frac{18.10^{-3} \times 5.10^5 \times 1 \times 1}{8,314 \times (273 + 150)} = 2,56 \text{ kg} = 2560 \text{ g}.$$

État initial à la température de 100 °C :

Dans le compartiment A, la masse introduite est inférieure à $m_{min} = 580 \text{ g}$ par conséquent ce compartiment contient uniquement du gaz dans l'état initial.

La pression initiale sera alors donnée par l'application de la loi des gaz parfaits soit :

$$P_{initiale A} = \frac{m_{iA}RT_i}{MSl} \quad \text{avec} \quad m_{iA \text{ gaz}} = 180 \text{ g}.$$

L'application numérique donne :

$$P_{initiale A} = \frac{180.10^{-3} \times 8,314 \times 373}{18.10^{-3} \times 1 \times 1} = 31011 \text{ Pa}$$

$$\boxed{P_{initiale A} = 0,31 \text{ bar.}}$$

Dans le compartiment B coexiste initialement un mélange à l'équilibre de liquide et de gaz car la masse d'eau introduite est supérieure à $m_{min} = 580 \text{ g}$.

Nous avons donc les caractéristiques suivantes :

$$\boxed{m_{iB \text{ gaz}} = 580 \text{ g}}$$

$$\boxed{m_{iB \text{ liquide}} = 1800 - 580 = 1220 \text{ g.}}$$

$$P_{initiale\ B} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar.}$$

État initial à la température de 150 °C :

Dans l'état final, les deux compartiments contiennent uniquement du gaz car la masse d'eau introduite est, dans chaque compartiment, inférieure à $m_{min} = 2560 \text{ g}$.

Pour le compartiment A, nous avons :

$$m_{fA\ gaz} = 180 \text{ g}$$

$$P_{finale\ A} = \frac{180.10^{-3} \times 8,314 \times (273 + 150)}{18.10^{-3} \times 1 \times 1}$$

$$P_{finale\ A} = 35168 \text{ Pa}$$

$$P_{finale\ A} = 0,35 \text{ bar.}$$

Pour le compartiment B, nous avons :

$$m_{fB\ gaz} = 1800 \text{ g}$$

$$P_{finale\ B} = \frac{1800.10^{-3} \times 8,314 \times (273 + 150)}{18.10^{-3} \times 1 \times 1}$$

$$P_{finale\ B} = 351682 \text{ Pa}$$

$$P_{finale\ B} = 3,52 \text{ bar.}$$

Il reste maintenant à appliquer le premier principe de la thermodynamique au système constitué par les deux compartiments.

Nous avons donc :

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = W + Q.$$

Comme la transformation est isochore, nous avons $W = 0$.

Le transfert thermique reçu par le système est donc égal à :

$$Q = \Delta U_A + \Delta U_B.$$

Pour le compartiment A, il y a un échauffement isochore de la masse d'eau gazeuse. Nous avons donc :

$$\Delta U_A = m_A c_v (T_f - T_i).$$

Dans l'énoncé nous avons la capacité thermique à pression constante donc en utilisant la loi de Mayer :

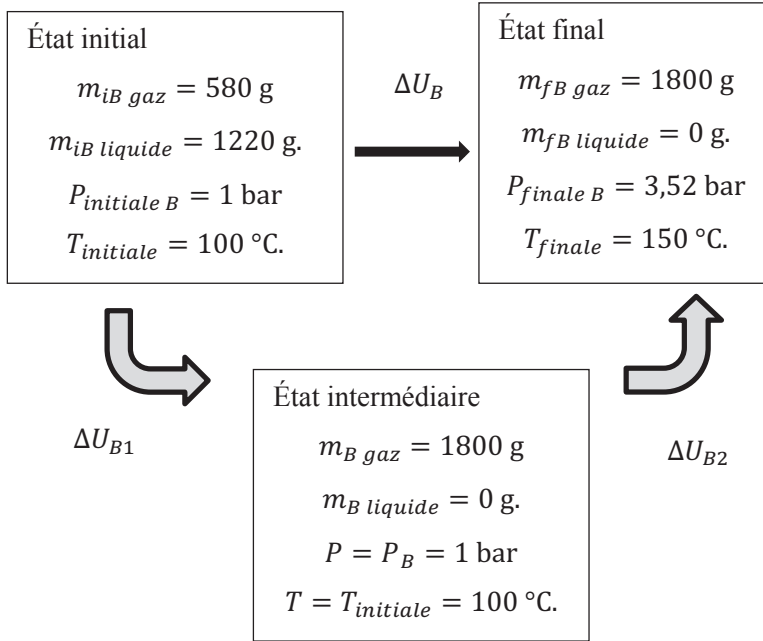
$$c_v = c_p - \frac{R}{M}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\Delta U_A = m_A \left(c_p - \frac{R}{M} \right) (T_f - T_i).$$

Il faut maintenant déterminer la variation d'énergie interne du compartiment B.

Pour cela commençons par faire un schéma en plaçant un état intermédiaire dans lequel toute l'eau est vaporisée :



Pour la vaporisation partielle de l'eau à température constante, nous avons :

$$\Delta H_{B1} = m_{iB \text{ liquide}} l_{\text{vap,eau}}(100 \text{ °C}).$$

Pour l'échauffement du gaz nous avons donc :

$$\Delta H_{B2} = m_{B \text{ gaz}} c_p (T_f - T_i).$$

La variation d'enthalpie est donc égale à :

$$\Delta H_B = \Delta H_{B1} + \Delta H_{B2}.$$

Il nous faut la variation d'énergie interne soit :

$$\Delta U_B = \Delta H_B - \Delta PV = \Delta H_B - (P_{\text{finale } B} - P_{\text{initiale } B})V$$

$$\Delta U_B = m_{iB \text{ liquide}} l_{\text{vap,eau}}(100 \text{ °C}) + m_{B \text{ gaz}} c_p (T_f - T_i) - (P_{\text{finale } B} - P_{\text{initiale } B})V.$$

Nous pouvons donc déterminer la variation d'énergie interne du système constitué des deux compartiments :

$$\Delta U = Q = \Delta U_A + \Delta U_B$$

$$Q = m_A \left(c_p - \frac{R}{M} \right) (T_f - T_i) + m_{iB \text{ liquide}} l_{vap, eau}(100 \text{ °C}) + m_{B \text{ gaz}} c_p (T_f - T_i) - (P_{finale B} - P_{initiale B}) V.$$

L'application numérique donne :

$$Q = 180.10^{-3} \left(2010 - \frac{8,314}{18.10^{-3}} \right) \times (150 - 100) + 1220.10^{-3} \times 2265.10^3 + 1800.10^{-3} \times 2010 \times (150 - 100) - (3,5.10^5 - 10^5) \times 1$$

$$Q = 2708133 \text{ J} = 2,7 \text{ MJ}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'application du premier principe de la thermodynamique.

Rapport du jury 2015

La formulation du premier principe laisse à désirer, comme par exemple $U = Q + W$. Il est étonnant, compte tenu du nouveau programme, que l'immense majorité des candidats formule le premier principe sous forme différentielle alors que bien souvent c'est la forme globale qui s'impose.

Rapport du jury 2016

Rappelons qu'il est généralement plus clair d'utiliser le premier principe sous forme globale alors que la quasi-totalité des candidats cherchent à utiliser la forme différentielle.

♡ Il faut se souvenir que l'énergie interne est une fonction d'état.

♡ Il faut se souvenir que le transfert thermique est égal à la variation d'énergie interne pour une transformation isochore et est égal à la variation d'enthalpie pour une transformation isobare.

Rapport du jury 2016

Il est surprenant que pour une transformation isobare les candidats utilisent l'énergie interne.

♡ Il faut se souvenir que le changement d'état se fait à température et pression constantes.

Formulaire

- Premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

$$\Delta U = W + Q.$$

- Transformation isochore :

$$W = 0$$

$$\Delta U = Q.$$

- Transformation isobare :

$$W = -P\Delta V$$

$$\Delta U = Q - P\Delta V$$

$$\Delta H = Q.$$

- Chaleur latente de changement d'état :

$$ml_{1\rightarrow 2} = \Delta H = H_2 - H_1.$$

- Variation d'énergie interne d'un gaz parfait :

$$\Delta U = mc_v\Delta T.$$

- Variation d'enthalpie d'un gaz parfait :

$$\Delta H = mc_p\Delta T.$$

- Relation de Mayer pour les capacités thermiques massiques du gaz parfait :

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}.$$

Énoncé

Un satellite est, tout d'abord, acheminé en altitude à l'aide d'une fusée au point S_0 . À l'instant $t = t_0$, on lui communique une vitesse $\vec{V}_0$.

L'angle de lancement est défini par l'angle entre $\vec{V}_0$ et la normale à la droite TS_0 . Ici l'angle de lancement est nul. T correspond au centre de la Terre.

- 1) Quelle est l'énergie potentielle du satellite à l'instant $t = t_0$?
- 2) Quelles sont les conséquences d'un angle de lancement nul ?
- 3) Donner la constante des aires.
- 4) Quelle est l'énergie cinétique à fournir au satellite pour qu'il ait une trajectoire circulaire de rayon r_0 ?
- 5) Déterminer l'altitude du satellite et sa vitesse pour qu'il soit géostationnaire sachant que la masse de la Terre est égale à $6 \cdot 10^{24}$ kg, que son rayon vaut 6400 km et que la constante de gravitation est égale à $6.67 \cdot 10^{-11}$ uSI.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice porte sur l'étude des trajectoires d'un satellite en fonction de l'énergie cinétique qui lui est initialement communiquée.

- 1) Penser à utiliser la force gravitationnelle qui est une force conservative.
↪ Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle, mais être capable de la retrouver.
- 2) Faire un schéma explicite comportant, le centre attracteur (la Terre) ainsi que le satellite dans sa position initiale et faire apparaître l'angle de lancement.
↪ Se souvenir qu'un schéma bien fait évite de perdre son temps dans des explications souvent mal maîtrisées !
- 3) Il s'agit d'un résultat de cours.
↪ Attention, être capable de retrouver la constante des aires et de donner rapidement la démarche conduisant à sa détermination.
- 4) La trajectoire du satellite étant circulaire, il suffit d'exprimer son accélération et d'utiliser le principe fondamental de la dynamique pour répondre à cette question.
↪ Connaître le résultat qui est un grand classique.
- 5) Il s'agit de déterminer le rayon de la trajectoire en fonction de la période du satellite. Attention à la définition de l'altitude. Penser à retrancher le rayon terrestre pour déterminer l'altitude.
↪ Utiliser simplement la définition de la période et remplacer par l'expression de la vitesse.

Corrigé

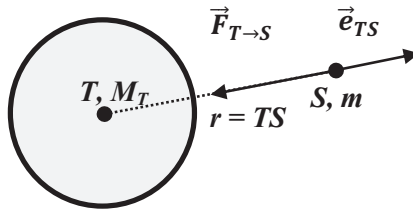
1) La force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite se met sous la forme :

$$\vec{F}_{T \rightarrow S} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_{TS}.$$

Dans cette expression :

- G représente la constante de gravitation universelle,
- m la masse du satellite,
- M_T la masse de la Terre,
- r la distance entre le centre de la Terre T et le barycentre du satellite S ,
- $\vec{e}_{TS}$ est le vecteur unitaire porté par droite TS et dirigé, de T vers S .

On a donc le schéma suivant :



Cette force dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle E_p si et seulement si, il existe E_p tel que :

$$\vec{F}_{T \rightarrow S} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r.$$

La force $\vec{F}_{T \rightarrow S}$ étant une force centrale, donc de la forme :

$$\vec{F}_{T \rightarrow S} = F(r) \vec{e}_r.$$

il vient :

$$\frac{dE_p}{dr} = -F(r) = -G \frac{mM_T}{r^2}.$$

L'intégration donne :

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r} + \text{cte}.$$

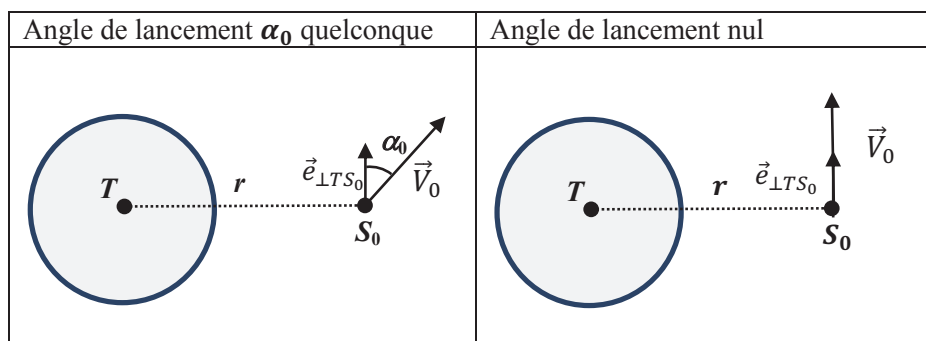
La constante d'intégration est choisie de telle sorte que lorsque la force d'interaction s'annule (c'est-à-dire lorsque r tend vers l'infini), l'énergie potentielle s'annule également. D'où :

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r}.$$

Initialement le satellite est à la distance $r_0 = TS_0$, son énergie potentielle initiale vaut donc :

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r_0}.$$

2) Faisons apparaître l'angle de lancement α_0 sur les schémas suivants.



Comme le montrent les deux figures précédentes, si l'angle de lancement est nul, la vitesse initiale du satellite est orthoradiale.

La position S_0 correspond alors, soit au périgé, soit à l'apogée si cette dernière position existe (cas d'une trajectoire elliptique).

Si la trajectoire est circulaire, cette position est quelconque, puisque la vitesse est dans ce cas, uniquement orthoradiale.

3) La constante des aires qui apparaît dans les mouvements à force centrale, vaut :

$$C = \frac{L}{m} = r^2 \dot{\theta}.$$

Dans cette expression, L est le moment cinétique du satellite, r la distance TS et θ l'angle (TS_0, TS) . Rappelons qu'un point matériel M , de masse m , soumis à une force centrale, est animé d'un mouvement plan.

En effet, appliquons le théorème du moment cinétique à M par rapport au point O , il vient :

$$\frac{d\vec{L}(M/O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge F(r)\vec{e}_r = 0.$$

On en déduit donc que :

$$\vec{L}(M/O) = \overrightarrow{Cte}$$

or :

$$\vec{L}(M/O) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M).$$

En conclusion, le vecteur position ainsi que le vecteur vitesse appartiennent au plan perpendiculaire au vecteur $\vec{L}(M/O)$ et passant par le centre attractif O , le mouvement est donc plan.

Exprimons ce vecteur constant à partir des conditions initiales et utilisons l'expression de la vitesse en coordonnées polaires (mouvement plan) :

$$\vec{L}_T = \overrightarrow{TS} \wedge m\vec{V} = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_T = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mr_0V_0\vec{e}_z$$

soit, pour la constante des aires :

$$C = r_0V_0.$$

4) Si la trajectoire est circulaire, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique vérifient la relation :

$$E_p = -2E_c.$$

En effet, appliquons la deuxième loi de Newton au satellite, dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Ce dernier est soumis à la seule force gravitationnelle exercée par la Terre, d'où :

$$m\vec{a} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r.$$

Or, le mouvement du satellite étant, par hypothèse, circulaire de rayon r_0 , la constante des aires impose :

$$\begin{aligned} C &= r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta} \\ C &= r_0 V_0. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\dot{\theta} = \frac{V_0}{r_0} = cte.$$

Pour un mouvement circulaire, on a donc :

$$\overrightarrow{TS} = r_0 \vec{e}_r.$$

La vitesse vaut :

$$\vec{V} = r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

L'accélération est donc dans le cas du mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{V_0^2}{r_0} \vec{e}_r.$$

Remplaçons dans l'équation (1) :

$$-m \frac{V_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r.$$

Simplifions par r_0 car $r_0 = r$:

$$mV_0^2 = G \frac{mM_T}{r_0}.$$

L'énergie potentielle est définie par :

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r_0}.$$

L'énergie cinétique est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} mV_0^2.$$

On a donc bien la relation :

$$\boxed{E_p = -2E_c.}$$

La relation vérifiée par l'énergie cinétique initiale est donc :

$$\boxed{E_c = G \frac{mM_T}{2r_0}.$$

Il est à noter que l'énergie cinétique ne varie pas au cours de la trajectoire, lorsque cette dernière est circulaire ($r = r_0$).

5) La période du satellite est définie par :

$$T = \frac{2\pi r_0}{V_0}.$$

La vitesse est égale, en utilisant la relation (2) à :

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

En remplaçant dans l'expression de la période, on obtient :

$$T = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}} = \frac{2\pi(r_0)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_T}}.$$

On a donc :

$$r_0 = \left(\frac{T}{2\pi} \sqrt{GM_T} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

On retrouve la troisième loi de Kepler qui dit que la période élevée au carré divisée par le grand axe (ici rayon) élevé au cube est constante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.$$

L'application numérique donne pour un satellite géostationnaire :

$$r_0 = \left(\frac{24 \times 3600}{2\pi} \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$r_0 = 42297523 \text{ m} = 42297 \text{ km}.$$

L'altitude du satellite géostationnaire est donc :

$$h = r_0 - R_T = 42297 - 6400$$

$$\boxed{h = 35897 \text{ km.}}$$

La vitesse du satellite est donc :

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{42297523}}$$

$$\boxed{V_0 = 3075 \text{ m.s}^{-1}.$$

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir que la mécanique de première année fait partie intégrante du programme évalué à l'oral des concours.

Rapport du jury 2010

Toute la mécanique de première année pose un vrai problème, suite aux impasses sur le programme.

♡ Il faut se souvenir des principales caractéristiques des mouvements à force centrale et savoir les retrouver rapidement.

Rapport du jury 2011

Les exercices avec les satellites sont mal maîtrisés (des souvenirs très lointains) et la relation entre la constante des aires et la loi des aires n'est pas claire. Le calcul de l'aire balayée n'est pas connu.

Rapport du jury 2016

La loi des aires est connue mais mal expliquée et souvent non démontrée.

♡ Il faut se souvenir de la mise en équation d'un satellite orbitant autour de la Terre et en particulier lorsque l'orbite est circulaire.

Rapport du jury 2011

Une erreur fréquente est revenue : « comme $r = \text{Cste}$ pour un mouvement circulaire, l'accélération est nulle ».

♡ Il faut se souvenir des lois de la gravitation et savoir retrouver sans erreur l'énergie potentielle de gravitation.

Rapport du jury 2007

L'obtention de l'expression de l'énergie potentielle de gravitation est toujours aussi mystérieuse (signe aléatoire), et son lien avec le travail est méconnu. Quant à la force de gravitation, elle agit sur certains satellites, en même temps que leur poids.

Formulaire

- Force centrale :

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r.$$

- Force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r.$$

- Énergie potentielle gravitationnelle :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \\ E_p &= -G \frac{mM}{r}.\end{aligned}$$

- Mouvement à force centrale, principales caractéristiques :

$$TMC : \frac{d\vec{L}(M/O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge F(r)\vec{e}_r = 0.$$

$$\vec{L}(M/O) = \overrightarrow{Cte} = m\vec{C}$$

$$C = r^2\dot{\theta}.$$

- tout point matériel soumis à une force centrale est animé d'un mouvement plan,
- ce plan contient le centre O et il est orthogonal au vecteur $\vec{L}$,
- $C = \|\vec{C}\|$ est la constante des aires, elle doit son nom au fait qu'en des temps égaux, les surfaces balayées par le rayon vecteur sont égales, en effet :

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}.$$

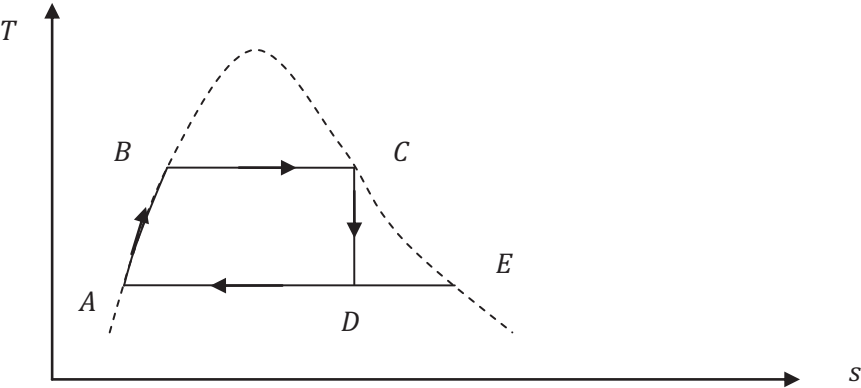
Exercice 21.1

L'eau utilisée dans la machine à vapeur suit le chemin suivant :

- refroidissement isobare dans un condenseur,
- compression dans une pompe calorifugée,
- échauffement isobare dans un réchauffeur,
- détente dans une turbine calorifugée.

L'eau peut subir une surchauffe. Dans ce cas, l'eau rentre dans un second réchauffeur (différent du premier) où elle est chauffée à la pression constante jusqu'à 500°C ($s = 6,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$). Elle subit ensuite une détente adiabatique réversible jusqu'à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ puis reprend le cycle normal.

Diagramme (T, s) d'une machine à vapeur sans surchauffe :



Point	A	B	C	D	E
Pression (bar)	1,00	100,00	100,00	1,00	1,00
Entropie massique ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)	1,2	3,4	5,6		7,4
Enthalpie massique ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	44	1400	2800		2800

Entropie massique pour le gaz parfait :

$$s(T, V) = c_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \frac{R}{M} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + s(T_0, V_0)$$

$$s(T, P) = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + s(T_0, P_0).$$

Entropie massique pour une phase condensée :

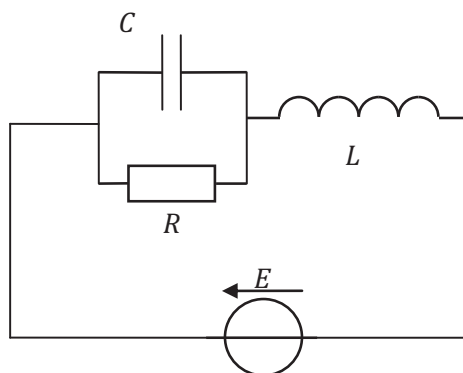
$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0).$$

- 1) Tracer les isobares sur le diagramme entropique de l'eau.
- 2) Le cycle suivi par l'eau est-il moteur ou récepteur ? Justifiez.
- 3) Déterminer le rendement ou l'efficacité de la machine thermique sans surchauffe.
- 4) Dessiner le cycle avec surchauffe dans le diagramme entropique de l'eau. Déterminer le rendement ou l'efficacité de la machine thermique avec surchauffe. Commenter.

Exercice 21.2

On considère le circuit RLC qui est alimenté par un générateur de tension continu E .

- 1) On allume le générateur de tension à l'instant $t = 0$. Pour $t = 0^-$, le courant dans la bobine est nul et le condensateur est déchargé. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant circulant dans la résistance R .
- 2) L'écrire sous la forme canonique en introduisant le facteur de qualité Q et la pulsation ω_0 .
- 3) Déterminer la valeur de ce courant ainsi que sa dérivée à l'instant initial.
- 4) En fonction de la valeur de Q , déterminer l'expression de l'intensité dans les différents cas.



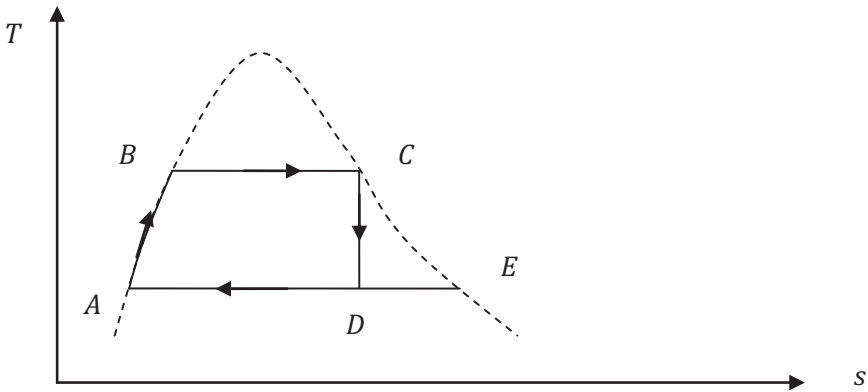
Énoncé

L'eau utilisée dans la machine à vapeur suit le chemin suivant :

- refroidissement isobare dans un condenseur,
- compression dans une pompe calorifugée,
- échauffement isobare dans un réchauffeur,
- détente dans une turbine calorifugée.

L'eau peut subir une surchauffe. Dans ce cas, l'eau rentre dans un second réchauffeur (différent du premier) où elle est chauffée à la pression constante jusqu'à 500°C ($s = 6,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $h = 3400 \text{ J.kg}^{-1}$). Elle subit ensuite une détente adiabatique réversible jusqu'à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ puis reprend le cycle normal.

Diagramme (T, s) d'une machine à vapeur sans surchauffe :



Point	A	B	C	D	E
Pression (bar)	1,00	100,00	100,00	1,00	1,00
Entropie massique ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$)	1,2	3,4	5,6		7,4
Enthalpie massique (kJ.kg^{-1})	44	1400	2800		2800

Entropie massique pour le gaz parfait :

$$s(T, V) = c_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{R}{M} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + s(T_0, V_0)$$

$$s(T, P) = c_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + s(T_0, P_0).$$

Entropie massique pour une phase condensée :

$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0).$$

- 1) Tracer les isobares sur le diagramme entropique de l'eau.
- 2) Le cycle suivi par l'eau est-il moteur ou récepteur ? Justifiez.
- 3) Compléter le tableau de valeurs. Déterminer le rendement ou l'efficacité de la machine thermique sans surchauffe.
- 4) Dessiner le cycle avec surchauffe dans le diagramme entropique de l'eau. Déterminer le rendement ou l'efficacité de la machine thermique avec surchauffe. Commenter.

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur la thermodynamique des machines en écoulement (PCSI-PT-PSI-MP).

- 1) Il faut retrouver l'équation d'une isobare dans le diagramme (T, s) .
↪ Utiliser l'expression de l'entropie fournie et penser que la pression est une constante. Penser à déterminer l'expression pour les deux phases.
- 2) Pour savoir si le cycle est moteur ou récepteur, il faut déterminer le signe du travail.
↪ Se rappeler que l'aire du cycle correspond au transfert thermique reçu par le fluide. Bien faire attention au signe.
- 3) Il faut reprendre chaque transformation et bien définir le gain et les dépenses. Utiliser le premier principe pour les fluides en écoulement qui est $\Delta h = w + q$.
↪ Bien définir le rendement ou l'efficacité. Ensuite calculer les grandeurs correspondantes.
- 4) Il faut ajouter une surchauffe au cycle précédent en utilisant la forme de l'isobare trouvée à la première question.
↪ Reprendre les calculs précédents en incluant la surchauffe. Cette dernière doit améliorer le rendement ou l'efficacité.

Corrigé

1) Afin de déterminer l'équation de l'isobare dans le diagramme entropique, nous reprenons l'expression de l'entropie du gaz en fonction des variables (T, P) . Nous avons donc :

$$s(T, P) = c_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + s(T_0, P_0).$$

Pour une transformation isobare, il reste :

$$s(T, P) = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0, P_0).$$

Il faut maintenant trouver l'expression de la température, soit :

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{s(T, P) - s(T_0, P_0)}{c_p}$$

$$\frac{T}{T_0} = e^{\frac{s(T, P) - s(T_0, P_0)}{c_p}}$$

$$T = T_0 e^{\frac{s(T, P) - s(T_0, P_0)}{c_p}}.$$

Nous avons donc une série d'exponentielles pour la partie gazeuse.

Dans la zone où coexistent le liquide et le gaz la transformation est isotherme et isobare donc nous avons encore le palier horizontal.

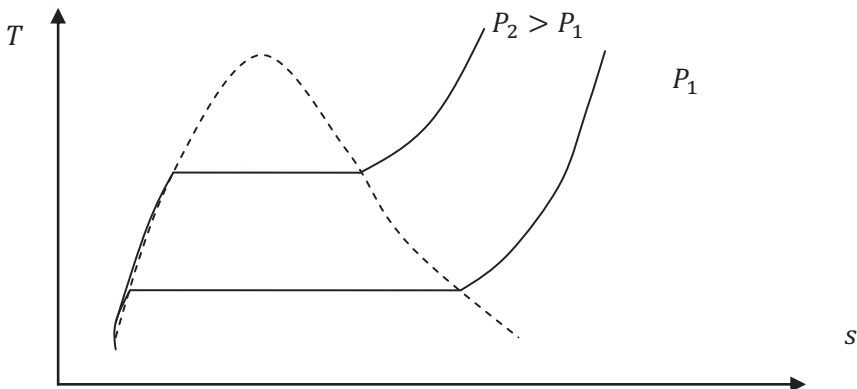
Pour la phase liquide nous avons :

$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0).$$

Cette expression est indépendante de la pression. Nous avons donc les isobares qui vérifient une équation semblable à celle des gaz soit :

$$T = T_0 e^{\frac{s(T, P) - s(T_0, P_0)}{c}}.$$

Nous avons encore affaire à des courbes exponentielles. Le tracé des isobares donne :



2) Le cycle est décrit dans le sens trigonométrique dans le diagramme (T, s) .

Le transfert thermique est donné par :

$$q = \int T ds.$$

Nous avons donc ici un transfert thermique total qui est positif.

Par application de premier principe de la thermodynamique au fluide en écoulement, nous avons pour un cycle :

$$\Delta h = w + q = 0.$$

Nous trouvons donc que :

$$w = -q < 0.$$

Nous avons donc affaire à un cycle moteur.

3) Pour la transformation AB , nous avons affaire à la compression adiabatique. Le premier principe appliqué au fluide en écoulement donne :

$$\Delta h = w_{AB} = h_B - h_A.$$

Pour la transformation BC , nous avons affaire à un échauffement isobare. Le premier principe appliqué au fluide en écoulement donne :

$$\Delta h = q_{BC} = h_C - h_B.$$

Pour la transformation CD , nous avons affaire à la détente adiabatique réversible. Le premier principe appliqué au fluide en écoulement donne :

$$\Delta h = w_{CD} = h_D - h_C.$$

Pour la transformation DA , nous avons affaire à un refroidissement isobare. Le premier principe appliqué au fluide en écoulement donne :

$$\Delta h = q_{DA} = h_A - h_D.$$

Le rendement du moteur est défini par :

$$\eta = \frac{\text{gain}}{\text{dépenses}}.$$

Le gain correspond au travail récupéré lors de la détente soit $-w_{CD}$.

Les dépenses correspondent au chauffage et à la compression soit : $w_{AB} + q_{BC}$.

Nous avons donc :

$$\eta = \frac{-w_{CD}}{w_{AB} + q_{BC}}$$

$$\eta = \frac{h_C - h_D}{h_B - h_A + h_C - h_B}$$

$$\eta = \frac{h_C - h_D}{h_C - h_A}$$

Il reste maintenant à faire l'application numérique. Il n'y a que h_D qui n'est pas donné.

Pour le déterminer nous utilisons l'entropie afin de connaître le titre massique de vapeur d'eau :

$$x_D = \frac{s_D - s_A}{s_E - s_A}$$

$$x_D = \frac{5,6 - 1,2}{7,4 - 1,2} = 0,77.$$

Nous avons la même relation avec les enthalpies soit :

$$x_D = \frac{h_D - h_A}{h_E - h_A}$$

$$h_D = h_A + x_D(h_E - h_A)$$

$$h_D = 44 + 0,77 \times (2800 - 44)$$

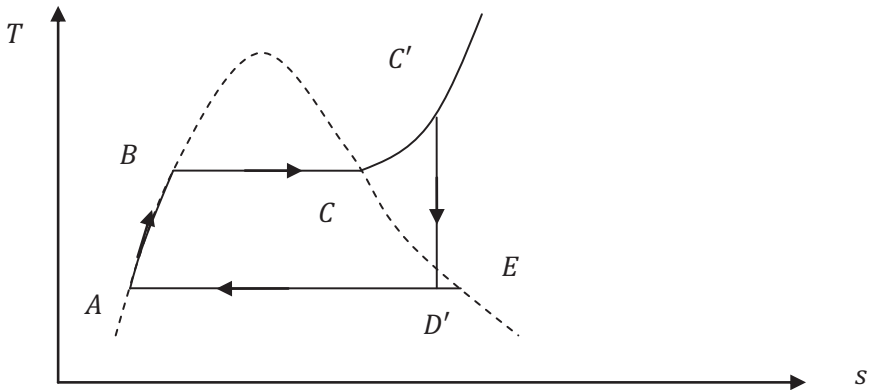
$$h_D = 2166 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

En remplaçant les valeurs numériques dans l'expression du rendement, nous obtenons :

$$\eta = \frac{2800 - 2166}{2800 - 44}$$

$$\eta = 0,23.$$

4) Nous commençons par dessiner le cycle avec surchauffe.



Le point C' se trouve sur l'isobare et a une entropie donnée. Pour aller de C' à D' la transformation est isentropique et le point D' correspond, vue la valeur de l'entropie, à un mélange liquide-gaz.

L'expression du rendement a la même forme que dans la question précédente. Il faut tenir compte de la surchauffe dans les dépenses.

Pour les dépenses nous avons :

$$w_{AB} + q_{BC'} = h_{C'} - h_A.$$

Le gain correspond à l'opposé du travail reçu entre les points C' et D' soit :

$$w_{C'D'} = h_{D'} - h_{C'}.$$

Le rendement est donc égal à :

$$\eta = \frac{-w_{C'D'}}{w_{AB} + q_{BC'}}$$

$$\eta = \frac{h_{C'} - h_{D'}}{h_B - h_A + h_{C'} - h_B}$$

$$\eta = \frac{h_{C'} - h_{D'}}{h_{C'} - h_A}.$$

Il reste maintenant à faire l'application numérique. Il n'y a que $h_{D'}$, qui n'est pas donné.

Pour le déterminer nous utilisons l'entropie afin de connaître le titre massique de vapeur d'eau :

$$x_{D'} = \frac{s_{D'} - s_A}{s_E - s_A} = \frac{6,6 - 1,2}{7,4 - 1,2} = 0,87.$$

Nous avons la même relation avec les enthalpies soit :

$$x_{D'} = \frac{h_{D'} - h_A}{h_E - h_A}$$

$$h_{D'} = h_A + x_{D'}(h_E - h_A)$$

$$h_{D'} = 44 + 0,87 \times (2800 - 44) = 2444 \text{ kJ. kg}^{-1}.$$

En remplaçant les valeurs numériques dans l'expression du rendement, nous obtenons :

$$\eta = \frac{3400 - 2444}{3400 - 44}$$

$$\boxed{\eta = 0,28.}$$

La surchauffe permet d'améliorer légèrement le rendement.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'expression du premier principe pour un fluide en écoulement dans une machine thermique.

Rapport du jury 2016

La thermodynamique de première année fait partie intégrante du domaine d'interrogation.

♡ Il faut se souvenir de la définition du rendement pour un moteur.

♡ Il faut se souvenir de bien définir le système étudié et d'identifier les différents éléments de la machine thermique.

Rapport du jury 2016

Enfin, les machines thermiques posent toujours problème, notamment pour identifier la fonction de chacun de ses éléments : il serait bon que les candidats sachent retrouver à quoi sert un évaporateur ; autre exemple : la transformation dans un détendeur est souvent considérée comme isenthalpique car ce n'est pas un dispositif dédié à un transfert thermique ou mécanique.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser correctement le diagramme entropique pour un corps pur diphasé.

♡ Il faut se souvenir de la règle des moments.

Formulaire

- Isobare dans un diagramme entropique :

$$T = T_0 e^{\frac{s(T,P) - s(T_0,P_0)}{c_P}}.$$

- Variation d'enthalpie massique pour une transformation isobare :

$$\Delta h = q.$$

- Variation d'enthalpie massique pour une transformation adiabatique pour un fluide en écoulement :

$$\Delta h = w.$$

- Premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement :

$$\Delta h = w + q.$$

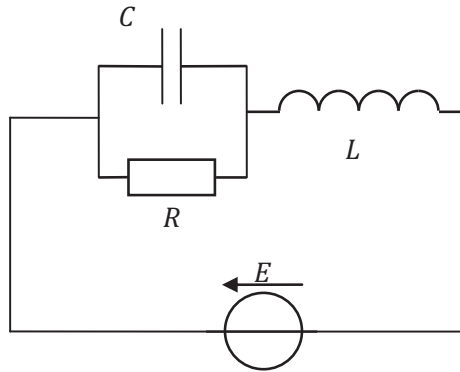
- Rendement du moteur :

$$\eta = \frac{\text{gain}}{\text{dépenses}}.$$

Énoncé

On considère le circuit RLC qui est alimenté par un générateur de tension continu E .

- 1) On allume le générateur de tension à l'instant $t = 0$. Pour $t = 0^-$, le courant dans la bobine est nul et le condensateur est déchargé. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant circulant dans la résistance R .
- 2) L'écrire sous la forme canonique en introduisant le facteur de qualité Q et la pulsation ω_0 .
- 3) Déterminer la valeur de ce courant ainsi que sa dérivée à l'instant initial.
- 4) En fonction de la valeur de Q , déterminer l'expression de l'intensité dans les différents cas.

**Analyse stratégique de l'énoncé**

Il s'agit d'un exercice d'électrocinétique. Le circuit fonctionne en régime transitoire.

- 1) Il faut simplement utiliser les lois de nœuds et des mailles.

↪ Procéder de façon méthodique en conservant comme inconnue uniquement le courant circulant dans la résistance.

- 2) Cette question ne pose pas de problème si l'on connaît l'expression de l'équation sous forme canonique.

↪ Penser à vérifier l'homogénéité de l'équation trouvée.

- 3) On détermine les conditions initiales.

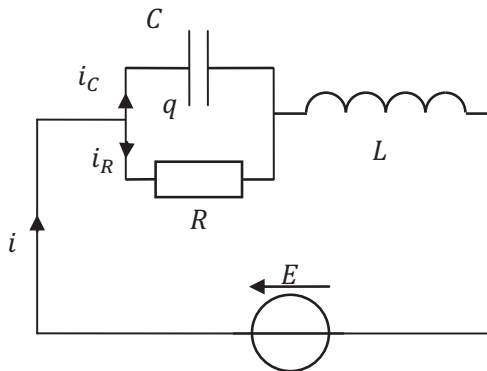
↪ Le courant est continu dans une bobine et la tension est continue aux bornes du condensateur.

4) Il faut maintenant résoudre l'équation différentielle trouvée en fonction des différentes valeurs possibles du facteur de qualité.

↪ On trouve les trois régimes possibles : apériodique, critique et pseudopériodique.

Corrigé

1) On commence par faire un schéma en plaçant les différents courants :



On a trois inconnues donc il faudra écrire trois équations : une loi des nœuds et deux lois des mailles.

On applique la loi des nœuds :

$$i = i_R + i_C.$$

On écrit la loi des mailles dans R , C :

$$\frac{q}{C} = Ri_R$$

avec :

$$i_C = \frac{dq}{dt}.$$

On écrit la loi des mailles dans E , R , L :

$$E = Ri_R + L \frac{di}{dt}.$$

On cherche une équation vérifiée par le courant i_R .

Dans la première équation, on exprime i_C :

$$i_C = -i_R + i.$$

On a :

$$i_C = \frac{dq}{dt} = RC \frac{di_R}{dt}$$

soit :

$$-i_R + i = RC \frac{di_R}{dt}.$$

D'où l'expression du courant i :

$$i = i_R + RC \frac{di_R}{dt}.$$

On reporte alors dans l'équation donnant E :

$$E = Ri_R + L \frac{d}{dt} \left(i_R + RC \frac{di_R}{dt} \right).$$

En calculant, on obtient :

$$RLC \frac{d^2 i_R}{dt^2} + L \frac{di_R}{dt} + Ri_R = E.$$

2) On cherche maintenant à mettre cette équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_R}{dt} + \frac{1}{LC} i_R = \frac{E}{RLC}$$

On a donc des termes qui sont homogènes à un courant divisé par un temps au carré.

On pose :

$$\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$$

et :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

On a donc comme équation canonique :

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_R}{dt} + \omega_0^2 i_R = \frac{E \omega_0^2}{R}.$$

On a :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$Q = RC \omega_0$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

On vérifie l'homogénéité de l'équation.

3) On s'intéresse maintenant aux conditions initiales. Le courant i dans la bobine est continu, soit :

$$i(0^-) = i(0^+) = 0.$$

La tension est continue aux bornes du condensateur, soit :

$$q(0^-) = q(0^+) = 0.$$

De la relation :

$$\frac{q}{C} = Ri_R$$

on en déduit que :

$$i_R(0^+) = 0.$$

De la relation :

$$i = i_R + RC \frac{di_R}{dt}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\frac{di_R}{dt}(0^+) = 0.}$$

4) On peut maintenant résoudre l'équation différentielle qui est une équation différentielle du second ordre avec second membre :

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_R}{dt} + \omega_0^2 i_R = \frac{E \omega_0^2}{R}.$$

La solution particulière est une constante qui vaut :

$$i_{Rpart} = \frac{E}{R}.$$

Maintenant, on s'intéresse à l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_R}{dt} + \omega_0^2 i_R = 0.$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q} \lambda + \omega_0^2 = 0.$$

On calcule le discriminant qui vaut :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2.$$

Il faut donc discuter en fonction du signe de Δ .

On cherche Q pour :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 &> 0 \\ \left(\frac{1}{Q}\right)^2 - 4 &> 0 \end{aligned}$$

soit :

$$Q < \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\lambda = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Dans ce cas la solution de l'équation sans second membre vaut :

$$i_{Rssm} = \alpha e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} + \beta e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}$$

Donc la solution complète est :

$$i_R = \frac{E}{R} + \alpha e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} + \beta e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}$$

On détermine maintenant les constantes grâce aux conditions initiales :

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} + \alpha + \beta = 0$$

$$\frac{di_R}{dt}(0^+) = \left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\alpha + \left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\beta = 0.$$

On résout le système et on trouve :

$$\alpha = -\frac{E}{R} \frac{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\beta = \frac{E}{R} \frac{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}}.$$

D'où la solution pour $Q < 0,5$:

$$i_R = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \frac{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}} e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} - \frac{E}{R} \frac{\left(\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}} e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}.$$

On a donc le régime apériodique.

On traite maintenant le cas $Q = 0,5$, c'est-à-dire $\Delta = 0$.

La solution finale est donc de la forme :

$$i_R = \frac{E}{R} + (\alpha + \beta t)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.$$

On détermine maintenant les constantes grâce aux conditions initiales :

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} + \alpha = 0$$

$$\frac{di_R}{dt}(0^+) = \beta - \frac{\omega_0}{2Q}\alpha = 0.$$

Donc :

$$\alpha = -\frac{E}{R} ; \beta = -\frac{\omega_0}{2Q} \frac{E}{R}.$$

D'où la solution du régime critique :

$$i_R = \frac{E}{R} \left(1 + \left(-1 - \frac{\omega_0}{2Q}t\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\right).$$

Reste le dernier cas à traiter, pour $Q > 0,5$, c'est-à-dire pour $\Delta < 0$. Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\lambda = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Donc la solution finale est de la forme :

$$i_R = \frac{E}{R} + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) \right).$$

On détermine les constantes par les conditions initiales :

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} + \alpha = 0$$

$$\frac{di_R}{dt}(0^+) = -\frac{\omega_0}{2Q}\alpha + \beta\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 0.$$

Soit :

$$\alpha = -\frac{E}{R} ; \beta = \frac{-\omega_0}{Q\sqrt{-\Delta}}\frac{E}{R}.$$

D'où le solution du régime pseudopériodique :

$$i_R = \frac{E}{R} \left(1 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) - \frac{\omega_0}{Q\sqrt{-\Delta}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) \right) \right).$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir d'établir correctement les lois de nœuds et lois des mailles.

♡ Il faut se souvenir des conditions initiales, c'est-à-dire la continuité du courant dans une bobine et la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

♡ Il faut se souvenir de la résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

Rapport du jury 2007

Depuis quelques années, de plus en plus de candidats rencontrent des difficultés dans l'utilisation d'outils mathématiques pourtant simples : confusion entre les propriétés de $\ln(x)$ et $\exp(x)$, primitives simples (telles que celle de $1/x^2$!!) incorrectes, confusion entre les solutions d'équations différentielles simples (linéaires à coefficients constants du premier ou du deuxième ordre)... ce qui est tout de même regrettable.

Formulaire

- Tension aux bornes d'un résistor :

$$U = Ri.$$

- Tension aux bornes d'un condensateur :

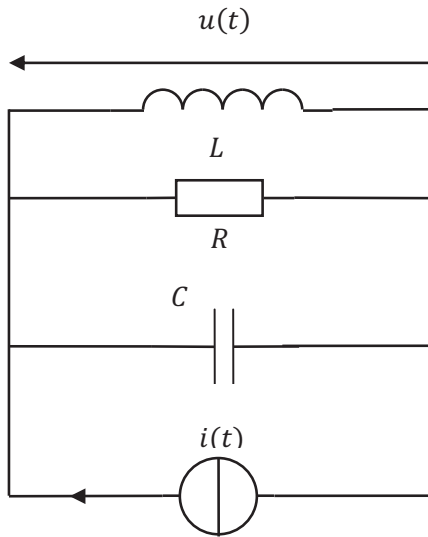
$$U = \frac{q}{C}.$$

- Tension aux bornes d'une bobine :

$$U = L\frac{di}{dt}.$$

Exercice 22.1

On considère un circuit RLC qui est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



- 1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit en fonction de R , L , C et du courant.
- 2) Déterminer l'amplitude U_m de $u(t)$ et montrer que U_m passe par un maximum pour une valeur ω_0 de la pulsation que l'on déterminera.
- 3) Tracer la courbe donnant U_m en fonction de ω .
- 4) Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.
- 5) Déterminer le facteur de qualité du circuit Q en fonction de R , L et C . On donne $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Exercice 22.2

On définit la température de la troposphère de la façon suivante :

$$\frac{dT}{dz} = -C$$

$$C = 6,00.10^{-3}\text{K.m}^{-1}.$$

En utilisant la loi de l'hydrostatique, établir la loi de pression décrivant la troposphère.

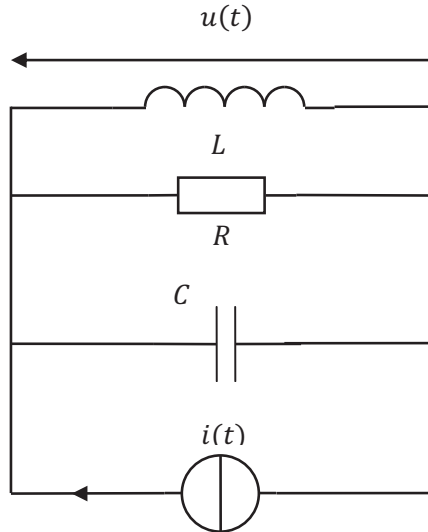
On pourra poser $\alpha = \frac{gM_{air}}{RC}$.

Calculer la pression à Chamonix et en haut du Mont Blanc.

$P_0 = 1013 \text{ hPa}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $M_{air} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

Énoncé

On considère un circuit RLC qui est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



- 1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit en fonction de R , L , C et du courant.
- 2) Déterminer l'amplitude U_m de $u(t)$ et montrer que U_m passe par un maximum pour une valeur ω_0 de la pulsation que l'on déterminera.
- 3) Tracer la courbe donnant U_m en fonction de ω .
- 4) Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.
- 5) Déterminer le facteur de qualité du circuit Q en fonction de R , L et C . On donne $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur l'électrocinétique qui est au programme de première année.

1) Attention, le circuit est alimenté par un générateur de courant. On a plutôt l'habitude d'avoir un générateur de tension. Cette question est donc assez simple si l'on pense à utiliser l'admittance complexe des trois éléments qui sont en parallèle.

↪ L'admittance complexe est égale à la somme des admittances pour des éléments en parallèle.

2) À partir de l'amplitude complexe, il faut trouver le module. Cette question ne doit pas poser de souci.

↪ Donner directement le module sans multiplier par le complexe conjugué.

3) Il s'agit de tracer une courbe représentant la tension en fonction de la pulsation.

↪ Faire l'étude des limites en basse et haute fréquences. Chercher s'il existe un maximum.

4) Il faut déterminer les pulsations de coupure. La valeur du gain correspondant à la pulsation de coupure est égale au gain maximum divisé par la racine de 2.

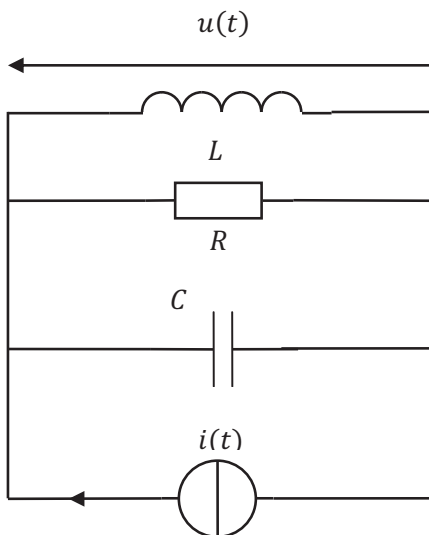
↪ Résoudre l'équation obtenue.

5) Pas de difficulté pour cette question. Il suffit d'exprimer le facteur de qualité qui est défini dans l'énoncé.

↪ Penser à bien simplifier l'expression.

Corrigé

1) On va donc calculer son admittance équivalente. Puisque les trois éléments sont en parallèle, elle est donc égale à la somme des admittances.



L'admittance de la résistance R vaut :

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}.$$

L'admittance de la bobine L vaut :

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}.$$

L'admittance du condensateur C vaut :

$$\underline{Y}_C = jC\omega.$$

Donc l'admittance totale est égale à :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C$$

soit :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega.$$

On a donc aux bornes du circuit, en notation complexe :

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}.$$

On peut donc en déduire l'expression de la tension complexe :

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$$

d'où :

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega}.$$

On arrange un peu l'expression pour faciliter les calculs suivants et l'on obtient :

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

Remarque : on laisse l'expression sous cette forme, car on pourra rapidement donner le module.

2) On prend maintenant le module de $\underline{U}$ qui est égal à :

$$U_m = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

On remarque que dans la racine, on a une somme de deux termes positifs. Ce terme est minimal lorsque le terme entre parenthèses est nulle, soit :

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0.$$

On trouve alors la pulsation correspondant au maximum :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La valeur de la tension maximale est donc :

$$U_{mmax} = RI_0.$$

3) On reprend l'expression de U_m :

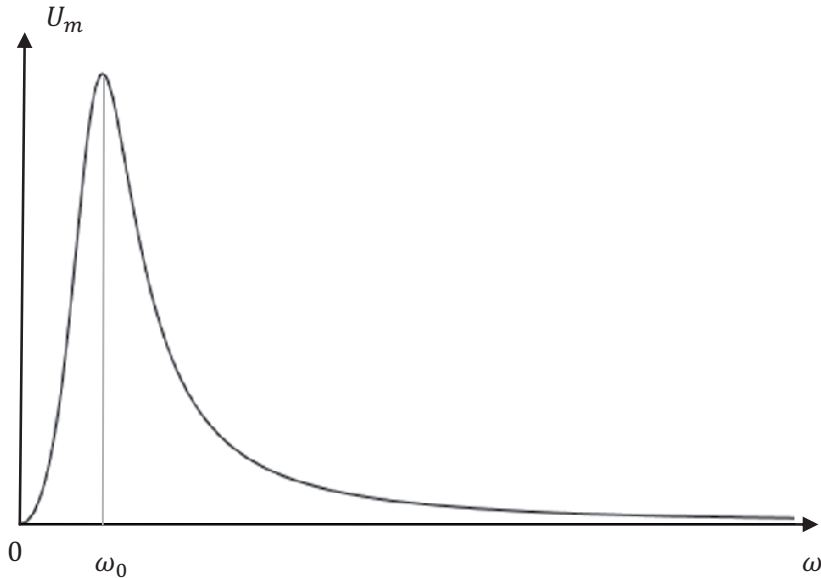
$$U_m = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

On commence par déterminer le comportement en basse pulsation, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 : U_m tend vers 0.

Lorsque ω tend vers ∞ , U_m tend aussi vers 0.

U_m passe par un maximum pour la valeur $\omega = \omega_0$.

On a donc la courbe suivante :



4) On va déterminer la largeur de la bande passante qui définit les pulsations de coupure. Les pulsations de coupure vérifient la relation suivante :

$$U_m(\omega) = \frac{U_{mmax}}{\sqrt{2}}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{RI_0}{\sqrt{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}}.$$

En identifiant les termes sous la racine :

$$1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = 2$$

donc :

$$R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2 = 1.$$

En prenant la racine carrée, on obtient :

$$R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \pm 1.$$

En réorganisant, on trouve donc deux équations du second ordre vérifiées par la pulsation ω :

$$LC\omega^2 \pm \frac{L}{R}\omega - 1 = 0.$$

Le discriminant est donc égal à :

$$\Delta = \left(\frac{L}{R} \right)^2 + 4LC.$$

Il est donc positif. On obtient alors les quatre solutions suivantes :

$$\omega = \frac{\pm \frac{L}{R} \pm \sqrt{\Delta}}{2LC}.$$

On ne conserve que les solutions physiquement acceptables, c'est-à-dire les pulsations positives. On a donc :

$$\omega_1 = \frac{-\frac{L}{R} + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 4LC}}{2LC}$$
$$\omega_2 = \frac{\frac{L}{R} + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 4LC}}{2LC}.$$

Donc en simplifiant :

$$\omega_1 = \frac{1}{2RC} \left(-1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}} \right)$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} \left(1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}} \right).$$

D'où la largeur de la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{1}{RC}}.$$

5) On peut maintenant déterminer le facteur de qualité du montage :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Soit en remplaçant avec les valeurs trouvées précédemment :

$$Q = \frac{RC}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des admittances des composants usuels.

♡ Il faut se souvenir de déterminer correctement le module d'un nombre complexe.

Rapport du jury 2014

La notation complexe pose curieusement de plus en plus de problèmes aux candidats et des exercices considérés comme basiques sont en réalité source de grandes difficultés : difficulté pour interpréter $\arg(\underline{Z})$ comme le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$, difficulté pour trouver $U_{eff} = |Z|I_{eff}$.

♡ Il faut se souvenir de la définition de la bande passante.

Formulaire

- Admittance du résistor :

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}.$$

- Admittance de la bobine :

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}.$$

- Admittance de la capacité :

$$\underline{Y}_C = jC\omega.$$

- Définition des pulsations de coupure :

$$\omega \text{ telles que } U(\omega) = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Énoncé

On définit la température de la troposphère de la façon suivante :

$$\frac{dT}{dz} = -C$$

$$C = 6,00.10^{-3} \text{ K.m}^{-1}.$$

En utilisant la loi de l'hydrostatique, établir la loi de pression décrivant la troposphère.

On pourra poser $\alpha = \frac{gM_{air}}{RC}$.

Calculer la pression à Chamonix et en haut du Mont Blanc.

$P_0 = 1013 \text{ hPa}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $M_{air} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de statique des fluides qui est au programme des filières PCSI et PTSI. Il sera vu en seconde année pour les MPSI.

Cette question ressemble beaucoup à une question de cours. Il faut prendre le fluide compressible qui vérifie la loi des gaz parfaits et en plus tenir compte des variations de la température en fonction de l'altitude.

↪ Utiliser l'équivalent volumique des forces de pression et appliquer l'équation locale de la statique à une particule fluide.

Ensuite, il s'agit de procéder à l'application numérique afin de contrôler la pertinence de notre résultat.

↪ La pression en altitude est plus faible qu'au niveau du sol.

Corrigé

On reprend l'équation de la statique des fluides établie dans le cours de première année :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \rho \vec{g}.$$

P représente la pression et ρ représente la masse volumique du fluide.

On projette sur l'axe vertical ascendant Oz :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

On considère que l'air se comporte comme un gaz parfait et on a donc la relation suivante :

$$PV = nRT = \frac{m}{M_{air}} RT.$$

La masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM_{air}}{RT}.$$

On a donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM_{air}}{RT} g.$$

La température varie en fonction de l'altitude de la façon suivante :

$$\frac{dT}{dz} = -C.$$

En intégrant, on trouve en fonction de la température T_0 en $z = 0$:

$$T = -Cz + T_0.$$

Donc finalement l'équation devient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_{air}}{R(T_0 - Cz)} g.$$

On obtient une équation différentielle à variables séparables que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}}{R} g \frac{dz}{T_0 - Cz}.$$

On peut donc intégrer et on obtient :

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_{air}}{RC} g \ln\left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right).$$

On a donc la relation suivante :

$$\boxed{P = P_0 \left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right)^\alpha}.$$

On peut donc passer à l'application numérique. On prend une température de 20 °C au niveau de la mer et une pression $P_0 = 1$ bar.

On détermine la constante α qui est sans dimension :

$$\alpha = \frac{gM_{air}}{RC} = \frac{9,8 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 6 \cdot 10^{-3}}$$

$$\alpha = 5,7.$$

Chamonix se trouve à une altitude de $z_c = 1000$ m. La pression vaut :

$$P = 10^5 \left(\frac{273 + 20 - 6 \cdot 10^{-3} \times 1000}{273 + 20} \right)^{5,7}$$

$$\boxed{P = 88875 \text{ Pa.}}$$

Le Mont Blanc se trouve à une altitude de $z_B = 4810$ m. La pression vaut :

$$P = 10^5 \left(\frac{273 + 20 - 6 \cdot 10^{-3} \times 4810}{273 + 20} \right)^{5,7}$$

$$\boxed{P = 55374 \text{ Pa.}}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la loi de la statique des fluides.

Rapport du jury 2013

La mécanique des fluides a été fort en retrait cette année.

♡ Il faut se souvenir de la résolution d'une équation différentielle à variables séparables.

Rapport du jury 2007

Depuis quelques années, de plus en plus de candidats rencontrent des difficultés dans l'utilisation des outils mathématiques pourtant simples : confusion entre les propriétés de $\ln(x)$ et $\exp(x)$, primitives simples (telles que $1/x^2$!!) incorrectes, confusion entre les solutions d'équations différentielles simples (linéaires à coefficients constants du premier ou du deuxième ordre)... ce qui est tout de même regrettable.

Formulaire

- Équivalent volumique des forces de pression :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} P.$$

- Loi de la statique des fluides placés dans le champ de pesanteur dans un référentiel galiléen :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}.$$

- Loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT$$

$$P = \rho \frac{RT}{M}.$$

Exercice 23.1

Soit une particule M de masse m et soumise, dans un référentiel galiléen, à une force de la forme :

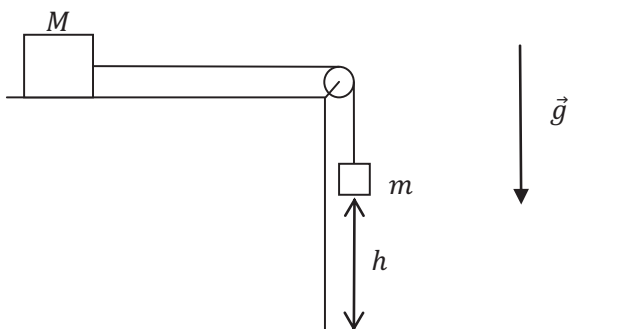
$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{e}_r.$$

On utilise le système de coordonnées polaires (r, θ) . La position initiale de la particule $\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_r$ et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ vérifient $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = 0$.

- 1) En utilisant des théorèmes de mécanique, décrire qualitativement le mouvement en fonction des données du problème.
- 2) Trouver une équation différentielle qui est vérifiée par la variable $r(t)$ et l'intégrer en posant $u = r^2$. Au bout de combien de temps la particule revient-elle à l'origine ?

Exercice 23.2

On considère le système formé par les deux masses M et m qui sont reliées par un fil inextensible et sans masse. Le fil passe par une poulie qui est sans masse et qui ne provoque pas de frottement. Le système est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre la masse M et le sol est défini par le coefficient de frottement f .



- 1) Déterminer la vitesse de la masse M lorsque la masse m s'écrase au sol.
- 2) Calculer le coefficient de frottement de glissement f sachant que la chute de la masse m d'une hauteur h provoque un déplacement total de M d'une distance d .

Énoncé

Soit une particule M de masse m et soumise, dans un référentiel galiléen, à une force de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{e}_r.$$

On utilise le système de coordonnées polaires (r, θ) . La position initiale de la particule $\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_r$ et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ vérifient $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = 0$.

- 1) En utilisant des théorèmes de mécanique, décrire qualitativement le mouvement en fonction des données du problème.
- 2) Trouver une équation différentielle qui est vérifiée par la variable $r(t)$ et l'intégrer en posant $u = r^2$. Au bout de combien de temps la particule revient-elle à l'origine ?

Analyse stratégique de l'énoncé

On a ici un exercice portant sur les mouvements à force centrale.

- 1) Il est impératif d'utiliser les résultats généraux des mouvements à force centrale.

↪ Penser à utiliser le moment cinétique et l'énergie potentielle effective.

- 2) Pour résoudre cette question, il est possible d'utiliser l'intégrale première du mouvement.

↪ Appliquer le changement de variable recommandé et intégrer l'équation trouvée. Penser aux conditions initiales.

Corrigé

- 1) Nous avons affaire à un mouvement à force centrale. La force est en $\frac{1}{r^3}$. Ceci ne correspond pas aux mouvements des satellites ou des particules chargées dont la force est en $\frac{1}{r^2}$.

Nous commençons par déterminer le moment cinétique par rapport au point O . Il vaut :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Dérivons ce moment cinétique par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v}.$$

Nous avons, pour un mouvement à force centrale, la deuxième loi de Newton qui donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{e}_r.$$

Nous avons donc :

$$\overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Nous pouvons donc en déduire que le moment cinétique est constant.

C'est une propriété générale des mouvements à force centrale.

Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique que l'on suppose suivant l'axe Oz .

Le moment cinétique est donc égal, en coordonnées cylindriques, à :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr_0 v_0 \vec{e}_z.$$

La vitesse est donnée en coordonnées polaires par :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Le moment cinétique s'écrit aussi :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Nous en déduisons une première équation qui est :

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = r_0 v_0.}$$

Nous pouvons maintenant appliquer la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = -\frac{k}{r^3} \vec{e}_r.$$

En coordonnées polaires, l'accélération vaut :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

Nous obtenons les deux équations suivantes en projetant sur les deux vecteurs des coordonnées polaires :

$$-m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r^3}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0.$$

La deuxième équation nous redonne celle obtenue avec le moment cinétique qui est :

$$r^2\dot{\theta} = Cte.$$

Nous pouvons déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force. Nous avons donc la relation suivante :

$$F = -\frac{k}{r^3} = -\frac{dE_p}{dr}.$$

En intégrant, nous obtenons :

$$E_p = -\frac{k}{2r^2} + Cte.$$

Nous pouvons pour simplifier prendre la constante nulle, c'est-à-dire que le potentiel est nul à l'infini. L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Le système est conservatif donc l'énergie mécanique est conservée. En utilisant la position et la vitesse initiale, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2r^2} = Cte = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{2r_0^2}.$$

$$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2}.$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{2r_0^2}.$$

Nous en déduisons l'expression de l'énergie potentielle effective qui est :

$$E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{k}{2r^2}.$$

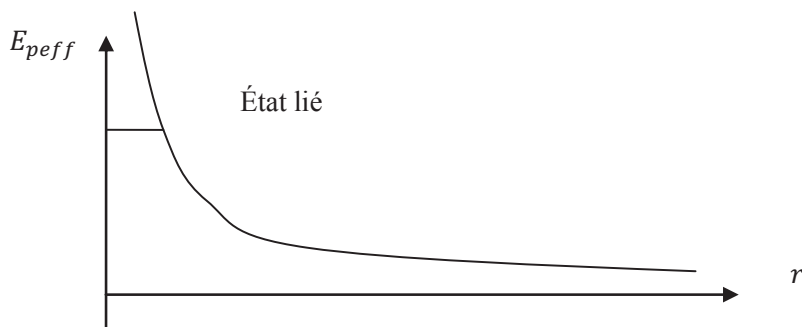
Elle peut donc s'écrire sous la forme :

$$E_{peff} = \frac{K'}{r^2}$$

avec :

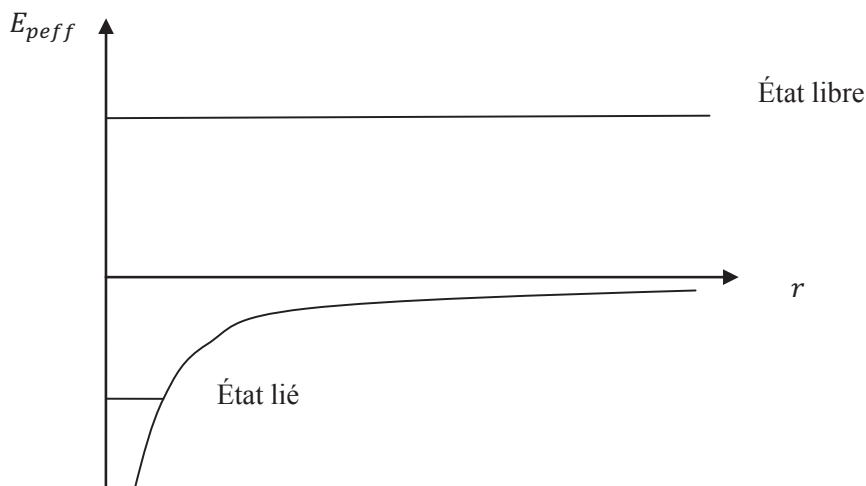
$$K' = \frac{1}{2}mr_0^2 v_0^2 - \frac{k}{2}.$$

Si $K' > 0$, nous avons le schéma suivant :



Dans ce cas tous les états d'énergie positive sont des états liés.

Dans le cas où $K' < 0$, nous avons le schéma suivant :



Les états d'énergie négative sont liés et les états d'énergie positive sont libres.

Si $K' = 0$, l'énergie potentielle effective est nulle. Seuls les états d'énergie positive sont possibles et correspondent à des états libres.

2) L'équation du mouvement est donnée par :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{2r_0^2}.$$

En divisant par la masse, nous obtenons :

$$\dot{r}^2 + \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{k}{mr^2} = v_0^2 - \frac{k}{mr_0^2}.$$

Nous posons :

$$K = r_0^2 v_0^2 - \frac{k}{m}.$$

Nous avons donc la relation entre K et K' qui est :

$$K = r_0^2 v_0^2 - \frac{k}{m} = \frac{2K'}{m}.$$

K et K' sont donc de même signe.

Nous avons donc en écriture simplifiée :

$$\dot{r}^2 + \frac{K}{r^2} = \frac{K}{r_0^2}.$$

$$\dot{r}^2 = \frac{K}{r_0^2} - \frac{K}{r^2}.$$

Pour que la particule puisse revenir à l'origine, il faut $r < r_0$, donc il faut nécessairement $K < 0$.

Nous utilisons le changement de variable proposé soit :

$$s = r^2$$

$$\dot{s} = 2r\dot{r}.$$

En remplaçant dans l'équation :

$$\dot{r}^2 = \frac{\dot{s}^2}{4r^2} = \frac{\dot{s}^2}{4s}.$$

$$\frac{\dot{s}^2}{4s} = -K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

$$\frac{\dot{s}^2}{4} = -K \left(1 - \frac{s}{r_0^2} \right).$$

En prenant la racine carrée, nous avons :

$$\dot{s} = \pm 2 \sqrt{-K \left(1 - \frac{s}{r_0^2} \right)}.$$

Nous pouvons séparer les variables :

$$\frac{\dot{s}}{\sqrt{\left(1 - \frac{s}{r_0^2} \right)}} = \pm 2\sqrt{-K}.$$

En intégrant, nous obtenons en fonction d'une constante d'intégration :

$$-2r_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{s}{r_0^2} \right)} = \pm 2\sqrt{-K}t + \alpha.$$

Pour déterminer cette constante d'intégration, nous utilisons les conditions initiales soit :

$$r(t = 0) = r_0$$

$$s(t = 0) = r_0^2.$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$-2r_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_0^2}{r_0^2} \right)} = \pm 2\sqrt{-K} \times 0 + \alpha$$

$$\alpha = 0.$$

Nous cherchons maintenant à déterminer la valeur de r en fonction du temps. Nous avons :

$$-r_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)} = \pm \sqrt{-K}t.$$

La solution correcte est donc celle qui est :

$$-r_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)} = -\sqrt{-K}t$$

$$1 - \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{-Kt^2}{r_0^4}$$

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{Kt^2}{r_0^4}$$

$$r^2 = r_0^2 \left(1 + \frac{Kt^2}{r_0^4} \right).$$

En prenant la racine carrée, nous obtenons :

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{Kt^2}{r_0^4}}.$$

La trajectoire correspond donc à une spirale.

La particule arrive en l'origine $r = 0$ pour :

$$1 + \frac{Kt^2}{r_0^4} = 0$$

$$t = \frac{r_0^2}{\sqrt{-K}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

♡ Il faut se souvenir de l'expression du moment cinétique en un point donné et du moment d'une force par rapport à un point ou à un axe.

Rapport du jury 2016

La notion de moment en un point est également problématique pour certains candidats, au mieux ils confondent avec le moment par rapport à un axe, au pire le produit vectoriel a totalement disparu, ainsi que la notion intuitive de bras de levier.

♡ Il faut se souvenir du cours et des propriétés des mouvements à force centrale et en particulier qu'un mouvement à force centrale est plan.

Rapport du jury 2016

Une parfaite connaissance et une parfaite compréhension du cours sont nécessaires à la bonne réussite de l'exercice proposé. Elles sont très importantes dans l'évaluation qui est faite du candidat par l'examineur, notamment dans le cas où l'exercice n'a pas été traité avec succès en préparation : elles assurent le plus souvent au candidat une note satisfaisante. Les candidats doivent être conscients qu'ils seront davantage jugés sur leur compréhension du cours et des démonstrations que sur leur capacité à ressortir automatiquement une démonstration apprise par cœur (équation de la chaleur, équation d'onde sur une corde, etc.).

♡ Il faut se souvenir d'intégrer correctement les équations et de faire attention aux signes en prenant les racines carrées.

Rapport du jury 2016

Par rapport à la session précédente, les candidats recourent plus facilement à l'analyse en termes d'ordres de grandeurs, ils semblent à l'aise avec cette approche. En revanche l'utilisation de l'outil mathématique s'est dégradée, des notions élémentaires (projections de vecteurs, résolution d'équation différentielles linéaires) ne sont plus maîtrisées par de nombreux candidats.

Formulaire

- Vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

- Accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

- Moment cinétique par rapport au point O :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

- Relation entre force et énergie potentielle pour une force dépendant de la variable r :

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}.$$

- Énergie mécanique :

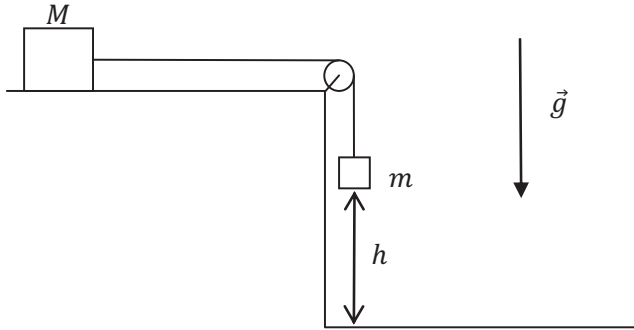
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r).$$

- Énergie potentielle effective :

$$E_{peff} = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r).$$

Énoncé

On considère le système formé par les deux masses M et m qui sont reliées par un fil inextensible et sans masse. Le fil passe par une poulie qui est sans masse et qui ne provoque pas de frottement. Le système est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre la masse M et le sol est défini par le coefficient de frottement f .



- 1) Déterminer la vitesse de la masse M lorsque la masse m s'écrase au sol.
- 2) Calculer le coefficient de frottement de glissement f sachant que la chute de la masse m d'une hauteur h provoque un déplacement total de M d'une distance d .

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de mécanique du solide portant sur les frottements.

1) On a un système constitué de deux masses. Il s'agit de déterminer la vitesse du système. Penser à faire un bilan énergétique.

↪ Il faut tenir compte de la force de frottement de la masse sur le sol.

2) On veut déterminer le coefficient de frottement. Maintenant la masse m est immobile. Penser à redéfinir le système.

↪ Utiliser encore une méthode énergétique sans oublier le travail de la force de frottement.

Corrigé

1) Dans cette première question, les deux masses se déplacent avec la même vitesse en module car le fil est inextensible.

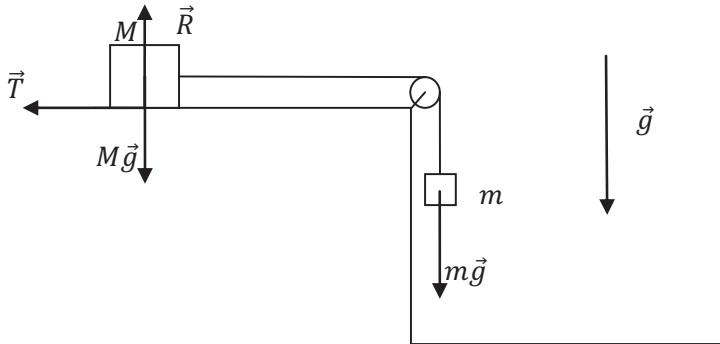
On prend donc comme système l'ensemble des deux masses et le fil.

On est dans un référentiel galiléen.

On fait le bilan des forces extérieures sur ce système.

Le système est soumis :

- au poids de la masse M : $M\vec{g}$;
- au poids de la masse m : $m\vec{g}$;
- à la force de frottement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ qui a donc une composante normale et une composante tangentielle ;
- à la réaction de la poulie qui ne travaille pas (pas de frottement).



De plus comme la masse M a un mouvement horizontal, on a aussi :

$$M\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

La loi de Coulomb donne la relation entre ces deux composantes. On a :

$$|T| = f|N|.$$

Donc :

$$|T| = fMg.$$

On va utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour le système qui est au repos à l'instant initial. Donc la variation d'énergie cinétique vaut :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - 0.$$

Pour les forces intérieures, il y a la force de tension du fil qui ne travaille pas.

On calcule le travail de la composante tangentielle de la force de frottement pour le déplacement de la distance h :

$$W = -fMgh.$$

On calcule le travail de la force de pesanteur pour la masse m :

$$W' = mgh.$$

En remplaçant dans le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 - 0 = mgh - fMgh.$$

On en déduit alors la vitesse du système juste avant que la masse m ne touche le sol :

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m - fM)}{M + m}}.$$

2) Maintenant la masse m est immobile sur le sol. On considère désormais le système constitué uniquement de la masse M .

Les forces appliquées sur cette masse sont toujours les mêmes, c'est-à-dire :

- le poids de la masse M : $M\vec{g}$;
- la force de frottement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$.

On a toujours :

$$|T| = fMg.$$

On applique donc le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial où la masse m touche le sol et l'instant final où la masse M s'arrête.

On a donc la variation d'énergie cinétique qui vaut :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}Mv^2.$$

La masse M se déplace d'une distance $d - h$.

Le travail de la force de frottement est donc égal à :

$$W = -fMg(d - h).$$

Donc :

$$0 - \frac{1}{2}Mv^2 = -fMg(d - h).$$

En remplaçant la vitesse, on trouve :

$$\frac{1}{2}M \frac{2gh(m - fM)}{M + m} = fMg(d - h)$$

$$Mmgh - fghM^2 = fMg(d - h)(M + m)$$

$$Mmh = f(M(d - h)(M + m) + hM^2)$$

$$mMh = f(M^2d + Mmd - M^2h - Mmh + hM^2).$$

On a donc l'expression du coefficient de frottement :

$$f = \frac{mh}{Md + md - mh}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir du théorème de l'énergie cinétique pour un solide seul ou un système de solides.

Rapport du jury 2011

Le nombre de paramètres doit pouvoir guider le candidat vers le choix éventuel d'une méthode énergétique, moins calculatoire.

♡ Il faut se souvenir de la force de frottement et des lois de Coulomb.

Rapport du jury 2005

Très fréquemment, les lois de Coulomb pour le frottement sont mal assimilées (confusion entre roulement sans glissement et contact sans frottement).

Formulaire

- Théorème de l'énergie cinétique pour un solide seul :

$$\Delta E_c = W_{ext}.$$

- Théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides :

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}.$$

- Force de frottement et lois de Coulomb :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}.$$

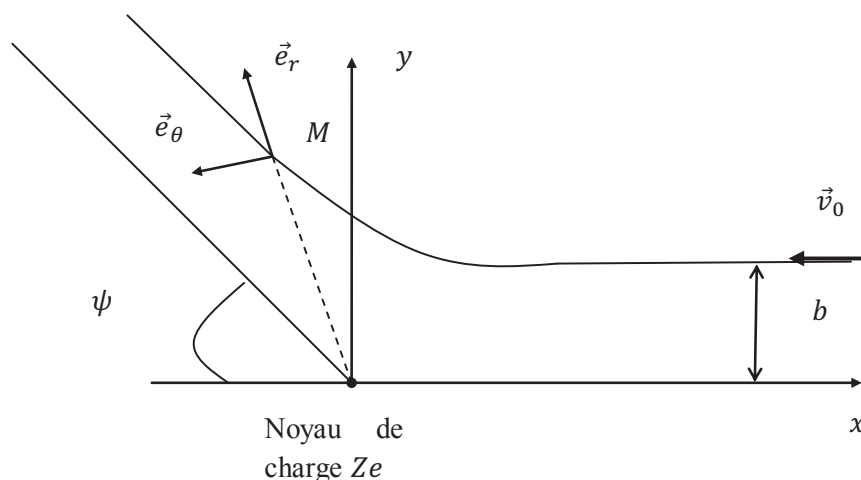
- Si roulement sans glissement : $T < fN$.
- Si glissement : $T = fN$.

Exercice 24.1

Une particule α , de charge $2e$, arrive de loin sur le noyau de charge Ze , avec une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = 5 \text{ Mev}$.

L'énergie potentielle se met sous la forme :

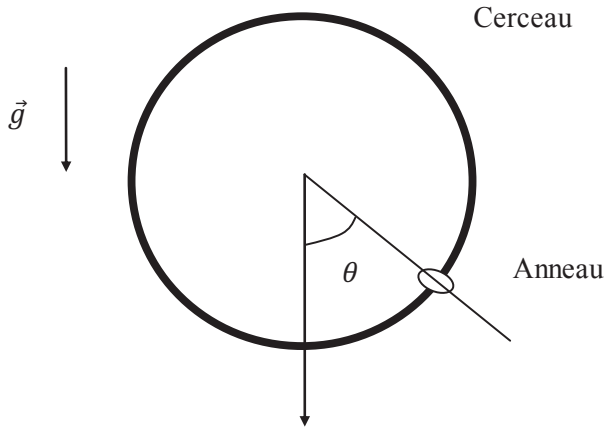
$$E_p = \frac{k}{r}.$$



- 1) Retrouver la valeur de k .
- 2) Déterminer la distance minimale d'approche r_0 de la particule α lorsque $b = 0$. Donner un ordre de grandeur.
- 3) Montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est une constante et l'exprimer en fonction de b et v_0 .
- 4) Déterminer l'énergie potentielle efficace de la particule.
- 5) Déterminer dans le cas où $b \neq 0$, la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de r_0 .
- 6) Montrer que le vecteur de Laplace $\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} + mk\vec{e}_r$ est une constante et déterminer sa direction. $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement et $\vec{L}$ représente le moment cinétique.
- 7) Déterminer l'angle de déviation ψ de la particule.

Exercice 24.2

Un anneau se trouve sur un cerceau de rayon R et peut s'y déplacer sans frottement.



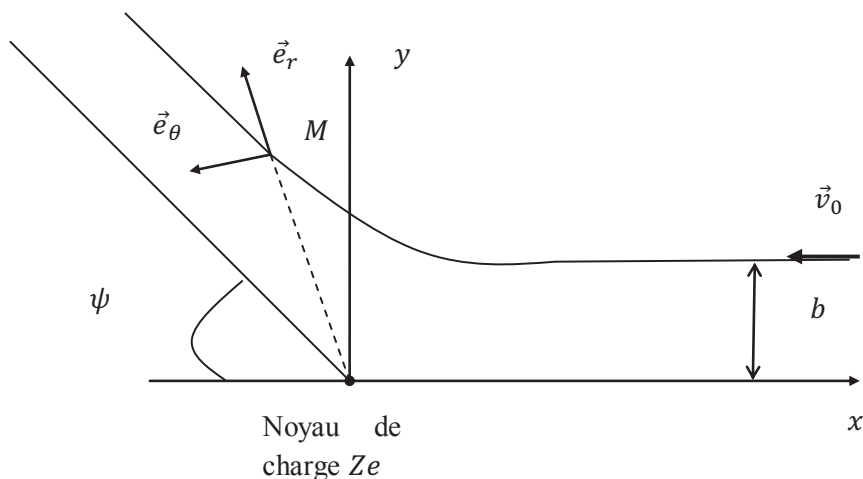
- 1) Déterminer les forces qui s'exercent sur l'anneau.
- 2) Montrer que le travail de l'une de ces deux forces est nul.
- 3) Montrer que l'autre force dérive d'une énergie potentielle qu'il faut déterminer.
- 4) Déterminer l'énergie cinétique de l'anneau.
- 5) Déterminer l'équation du mouvement de l'anneau.
- 6) Déterminer la période des petites oscillations.

Énoncé

Une particule α , de charge $2e$, arrive de loin sur le noyau de charge Ze , avec une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = 5 \text{ Mev}$.

L'énergie potentielle se met sous la forme :

$$E_p = \frac{k}{r}.$$



- 1) Retrouver la valeur de k .
- 2) Déterminer la distance minimale d'approche r_0 de la particule α lorsque $b = 0$. Donner un ordre de grandeur.
- 3) Montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est une constante et l'exprimer en fonction de b et v_0 .
- 4) Déterminer l'énergie potentielle efficace de la particule.
- 5) Déterminer dans le cas où $b \neq 0$, la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de r_0 .
- 6) Montrer que le vecteur de Laplace $\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} + mk\vec{e}_r$ est une constante et déterminer sa direction. $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement et $\vec{L}$ représente le moment cinétique.
- 7) Déterminer l'angle de déviation ψ de la particule.

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un sujet portant la mécanique du point et en particulier un mouvement à force centrale.

1) Il faut, dans cette première question, revenir à la définition de la force d'interaction entre deux particules chargées et retrouver l'énergie potentielle dont elle dérive.

↪ Bien se souvenir de la loi de Coulomb.

2) Il s'agit ici de raisonner sur l'énergie.

↪ Utiliser le fait que le système est conservatif.

3) Il s'agit ici d'une question de cours.

↪ Reprendre la démonstration de la conservation du moment cinétique.

4) Il est encore utile pour cette question de bien connaître son cours et de se souvenir de la définition de l'énergie potentielle effective.

↪ Penser à exprimer la vitesse de la particule en fonction de r et θ .

5) Pour déterminer la distance minimale d'approche, il est utile de réfléchir en utilisant l'énergie potentielle effective.

↪ Cette question est assez longue et les calculs ne sont pas simples. Il est important d'expliquer sa démarche.

6) Cette question est sans difficulté.

↪ Penser seulement à dériver ce vecteur.

7) Il faut utiliser la question précédente afin de trouver l'angle de déviation.

↪ Attention à la définition de l'angle de déviation qu'il faudra relier à θ .

Corrigé

1) La force exercée par le noyau de charge Ze sur la particule α est égale à :

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle qui vérifie :

$$F = -\frac{dE_P}{dr} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Par intégration, nous obtenons :

$$E_P = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte.$$

Nous supposons que l'énergie potentielle est nulle lorsque la distance r est infinie.
Nous en déduisons donc que :

$$E_P = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{k}{r}.$$

La valeur de k est donc :

$$\boxed{k = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}}.$$

L'application numérique donne :

$$k = Z \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2\pi \frac{1}{36\pi 10^9}} = Z \times 4,6 \cdot 10^{-28} \text{ J.m.}$$

2) Comme la force dérive d'une énergie potentielle, le système constitué par la particule α est conservatif.

Dans le cas où $b = 0$, lorsque la particule est très loin, son énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Lorsque la particule est à la distance minimale, sa vitesse est nulle donc l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_P = \frac{k}{r_0}.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{k}{r_0}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{2k}{mv_0^2} = \frac{1}{mv_0^2} \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0}}.$$

L'application numérique donne :

$$r_0 = \frac{Z \times 4,6 \cdot 10^{-28}}{5 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = Z \times 5,76 \cdot 10^{-16} \text{ m.}$$

3) Exprimons le moment cinétique de la particule par rapport à l'origine :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Dérivons cette expression :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Comme la particule α est soumise à une force centrale nous avons :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Et donc :

$$\overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Nous venons donc de démontrer que la dérivée du moment cinétique est nulle soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \\ \vec{L} &= \text{Cte.} \end{aligned}$$

Exprimons le vecteur position et le vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Le moment cinétique est donc égal à :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Comme le moment cinétique est constant, nous avons donc :

$$r^2\dot{\theta} = \text{Cte.}$$

Nous pouvons déterminer le moment cinétique lorsque la particule est très loin. Nous avons donc :

$$\vec{L}(\infty) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_0 = mbv_0\vec{e}_z.$$

Nous avons donc :

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = bv_0.}$$

4) L'énergie cinétique de la particule en coordonnées polaires est égale à :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

Nous pouvons remplacer $\dot{\theta}$ en fonction de r soit :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m \frac{(bv_0)^2}{r^2}.$$

L'énergie mécanique est donc égale à :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m \frac{(bv_0)^2}{r^2} + \frac{k}{r}.$$

L'énergie potentielle effective est donc par définition égale à :

$$E_{p\,eff} = \frac{1}{2}m \frac{(bv_0)^2}{r^2} + \frac{k}{r}.$$

5) La particule α atteint sa distance minimale d'approche lorsque $\frac{dr}{d\theta} = 0$. Nous avons donc :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{bv_0}{r^2}.$$

$\frac{dr}{d\theta} = 0$ correspond aussi à $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'énergie potentielle effective est maximale soit :

$$\frac{1}{2}m \frac{(bv_0)^2}{r^2} + \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Nous obtenons une équation du second degré en multipliant cette dernière par r^2 soit :

$$\frac{1}{2}m(bv_0)^2 + kr = \frac{1}{2}mv_0^2 r^2.$$

$$r^2 - \frac{2k}{mv_0^2}r - \frac{(bv_0)^2}{v_0^2} = 0$$

$$r^2 - \frac{2k}{mv_0^2}r - b^2 = 0.$$

Le discriminant est égal à :

$$\Delta = \left(\frac{2k}{mv_0^2} \right)^2 + 4b^2 > 0.$$

Les deux solutions sont :

$$r = \frac{k}{mv_0^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2k}{mv_0^2} \right)^2 + 4b^2}.$$

La solution négative n'est pas physiquement acceptable donc nous obtenons la distance minimale :

$$r_{min} = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2} \right)^2 + b^2}.$$

En fonction de r_0 , nous avons :

$$\boxed{r_{min} = \frac{r_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_0}{2} \right)^2 + b^2}.$$

Lorsque $b = 0$, nous retrouvons bien la valeur r_0 .

6) Nous pouvons maintenant dériver le vecteur de Laplace qui est donné par :

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} + mk\vec{e}_r.$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} + mk \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Le moment cinétique est constant donc :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

En utilisant la deuxième loi de Newton, nous obtenons :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \wedge mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = -mk\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Nous avons aussi :

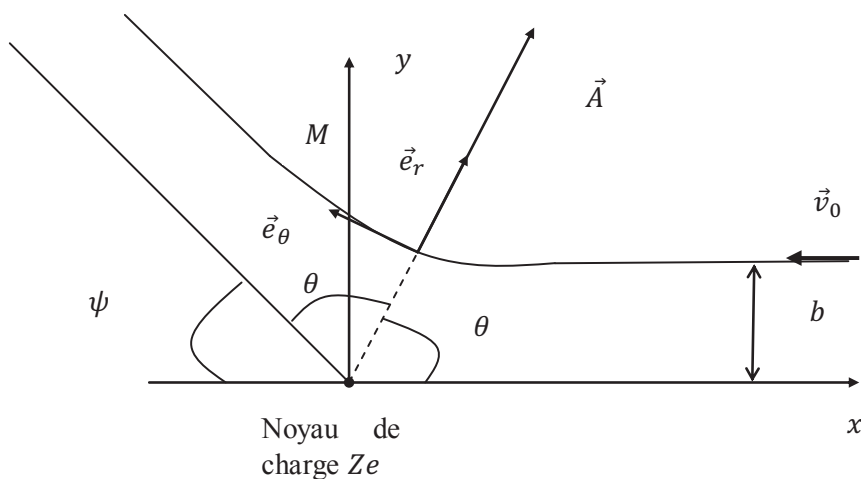
$$mk \frac{d\vec{e}_r}{dt} = mk\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Nous avons donc :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0.$$

Donc le vecteur $\vec{A}$ est constant.

7)



Pour la direction du vecteur $\vec{A}$, nous prenons la particule lorsque qu'elle se trouve au plus près de la charge. Dans ce cas le vecteur quantité de mouvement est suivant la trajectoire selon $\vec{e}_\theta$, le vecteur moment cinétique est selon le vecteur $\vec{e}_z$. Le produit vectoriel est donc selon le vecteur $\vec{e}_r$. Le vecteur $\vec{A}$ a donc la direction $\vec{e}_r$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}$.

Lorsque la particule se trouve à l'infini, le vecteur $\vec{A}$ vaut :

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} + km\vec{e}_x = -m(v_0\vec{e}_x) \wedge mbv_0\vec{e}_z + km\vec{e}_x = m^2bv_0^2\vec{e}_y + km\vec{e}_x.$$

Nous avons donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{m^2bv_0^2}{km} = \frac{mbv_0^2}{k}.$$

Nous savons que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)}.$$

Nous trouvons donc que :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{k}{mbv_0^2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mbv_0^2}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'il est important d'analyser le sujet avant de se lancer dans des calculs complexes.

Rapport du jury 2016

Un exercice de mécanique doit débiter, autant que possible, par une discussion physique qui, en plus de présenter les phénomènes en jeu, permettra de dégager la meilleure stratégie de résolution. Trop de candidats, faisant fi de cette étape, se plongent directement dans un ensemble décousu d'équations dont ils ne savent que faire une fois qu'elles ont été écrites.

♡ Il faut se souvenir des propriétés liées au mouvement à force centrale pour une masse ponctuelle.

Rapport du jury 2016

Sur les exercices traitant des mouvements à force centrale, les résultats classiques comme les lois de conservation, les lois de Kepler doivent savoir être rapidement énoncées et redémontrées. Il n'est pas raisonnable de passer près de la moitié de la séance d'oral pour retrouver, avec l'aide de l'examinateur, la période de révolution d'un objet en orbite circulaire.

♡ Il faut se souvenir de projeter correctement les vecteurs.

Rapport du jury 2016

La mécanique du point est plutôt bien traitée, en dépit d'erreurs de projection plus fréquentes.

♡ Il faut se souvenir d'utiliser les grandeurs énergétiques pour un système conservatif.

Rapport du jury 2016

Certains ne pensent pas à utiliser à bon escient les théorèmes énergétiques, alors que dans la plupart des cas ces méthodes simplifient la tâche de l'étudiant. Enfin, les exercices de mécanique étant très concrets, il faut faire des tests de pertinence une fois le résultat obtenu.

Formulaire

- Relation entre la force et l'énergie potentielle à 1 dimension :

$$F_r = -\frac{dE_p}{dr}.$$

- Moment cinétique par rapport à O pour un mouvement à force centrale :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

- Énergie mécanique dans le cas du mouvement à force centrale :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}.$$

- Énergie mécanique en coordonnées polaires :

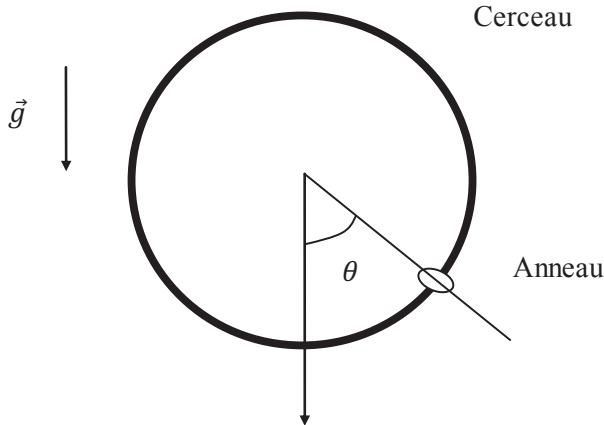
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + \frac{k}{r}.$$

- Énergie potentielle effective :

$$E_{p\,eff} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + \frac{k}{r}.$$

Énoncé

Un anneau se trouve sur un cerceau de rayon R et peut s'y déplacer sans frottement.



- 1) Déterminer les forces qui s'exercent sur l'anneau.
- 2) Montrer que le travail de l'une de ces deux forces est nul.
- 3) Montrer que l'autre force dérive d'une énergie potentielle qu'il faut déterminer.
- 4) Déterminer l'énergie cinétique de l'anneau.
- 5) Déterminer l'équation du mouvement de l'anneau.
- 6) Déterminer la période des petites oscillations.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur le programme de mécanique du point de première année.

- 1) Il s'agit de faire le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau.

↪ Aucune difficulté.

- 2) Pour répondre à cette question, il faut bien lire l'énoncé. Vous avez presque la réponse.

↪ Utiliser le fait qu'il n'y a pas de frottement.

- 3) Là encore une question de cours. Le poids dérive d'une énergie potentielle.

↪ Penser à exprimer l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ .

- 4) C'est encore une question très proche du cours. Il faut déterminer l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle ayant un mouvement de rotation.

↪ Utiliser l'expression de l'énergie cinétique et exprimer la vitesse en fonction de l'angle θ .

5) Pour obtenir l'équation du mouvement, les questions précédentes poussent à utiliser un bilan énergétique.

↪ Pour un système conservatif, l'énergie mécanique se conserve. Penser à dériver l'équation obtenue.

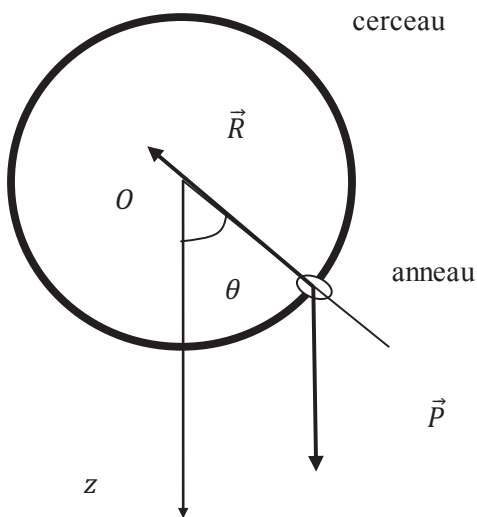
6) C'est la question classique des oscillations autour de la position d'équilibre pour les petits angles.

↪ Reconnaître l'équation de l'oscillateur harmonique lorsque θ est petit.

Corrigé

1) Nous considérons que l'anneau est assimilable à une masse ponctuelle. L'anneau est soumis à deux forces qui sont le poids $\vec{P}$ et la réaction du cerceau $\vec{R}$. Comme l'anneau se déplace sans frottement, la réaction est perpendiculaire au déplacement.

Nous pouvons les représenter sur le schéma :



2) Comme la réaction est perpendiculaire au déplacement, cette force ne travaille pas. Nous avons donc :

$$\boxed{W_{\vec{R}} = \int \vec{R} \cdot \vec{v} dt = 0.}$$

3) Le poids dérive d'une énergie potentielle. Nous avons donc la relation suivante avec l'axe Oz vertical descendant :

$$\delta W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{dl} = mg dz = -d\mathcal{E}_{pP}.$$

Attention au sens de l'axe vertical qui définit le signe de l'énergie potentielle. Ne pas apprendre le résultat par cœur. Il faut retenir que lorsque l'objet s'éloigne du sol terrestre, l'énergie potentielle augmente.

En intégrant cette équation différentielle, nous obtenons :

$$\mathcal{E}_{pP} = -mgz + Cste.$$

L'énergie potentielle est définie à une constante près. Par exemple, nous pouvons fixer l'énergie potentielle nulle en $z = 0$. Nous avons donc :

$$\mathcal{E}_{pP} = -mgz.$$

Il est préférable ici d'utiliser la variable θ . Nous avons donc :

$$z = R \cos \theta$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{pP} = -mgR \cos \theta.}$$

Nous aurions pu utiliser la relation entre la force et l'énergie potentielle qui est :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{pP}.$$

Comme le poids est suivant l'axe vertical, l'énergie potentielle ne dépend que de la variable z . Nous avons donc :

$$mg \vec{e}_z = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial y} = 0$$

Il reste :

$$mg = - \frac{\partial \mathcal{E}_{pP}}{\partial z}$$

$$\mathcal{E}_{pP} = -mgz + Cste.$$

Nous retrouvons bien le même résultat.

4) L'énergie cinétique d'une masse ponctuelle est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

L'anneau peut se déplacer sur le cerceau. Il est donc animé d'un mouvement circulaire. La position de l'anneau est en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r.$$

La vitesse est donc :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

L'énergie cinétique en fonction de l'angle θ est donc :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2.$$

5) Comme le système est conservatif (la force de réaction ne travaille pas et le poids dérive d'une énergie potentielle), l'énergie mécanique est conservée. Nous avons donc :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = Cste.$$

En remplaçant par les expressions déterminées en fonction de l'angle θ , nous obtenons :

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = Cste.$$

Il est inutile de déterminer cette constante car nous voulons l'équation du mouvement. Pour obtenir cette dernière, il suffit de dériver. Nous obtenons ainsi :

$$mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

Nous pouvons simplifier par $\dot{\theta}$ pour avoir l'équation du mouvement :

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

Nous obtenons la même équation que pour le pendule simple de longueur R .

6) Pour les petits mouvements, l'angle θ reste petit et nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$\sin \theta \approx \theta.$$

L'équation du mouvement devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0.$$

Nous pouvons donc identifier la pulsation qui vaut :

$$\omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

La période des petites oscillations est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la signification d'un mouvement sans frottement et il faut se souvenir que les forces sont modélisées par des vecteurs.

Rapport du jury 2015

La mécanique du point est très mal traitée, la plupart des candidats s'affranchissant de toute formulation vectorielle (« je raisonne en norme ») ce qui conduit rapidement à des catastrophes. On regrette le manque de soin pour les constructions faites au tableau.

♥ Il faut se souvenir d'utiliser l'énergie mécanique pour trouver l'équation du mouvement.

♥ Il faut se souvenir de la technique qui permet de trouver l'énergie potentielle à partir de l'expression de la force.

♥ Il faut se souvenir de l'équation de l'oscillateur harmonique.

Rapport du jury 2016

Nous notons moins de lacunes en mécanique du point élémentaire.

Formulaire

- Énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

- Énergie potentielle de pesanteur avec un axe vertical ascendant :

$$\mathcal{E}_p = mgz + Cste.$$

- Énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p.$$

- Relation entre force conservative et énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p.$$

- Condition de déplacement sans frottement :

La force de réaction est perpendiculaire au déplacement.

- Équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

- Période de l'oscillateur harmonique :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Formulaire à compléter et derniers extraits de rapports

Ce formulaire est volontairement vide. À vous de le remplir au fur et à mesure de vos apprentissages... En effet, ce formulaire ne vous sera utile que si vous en êtes l'auteur !

Il sera certainement plus pratique de reprendre ce formulaire sur des fiches séparées pour disposer d'un peu plus de place.

Si jamais vous ne savez pas répondre à certaines questions, n'hésitez pas à solliciter votre professeur.

Enfin, certaines parties de ce formulaire commencent avec des extraits des rapports du jury les plus marquants sur les parties concernées : n'hésitez pas à bien méditer ces rapports !

Bon courage !

1) Signaux physiques

Rapport du jury 2017

En optique géométrique, les tracés sont souvent mal maîtrisés surtout en présence de lentilles divergentes, alors que ces tracés peuvent être d'une grande aide.

Le fonctionnement de l'œil normal ainsi que les défauts de l'œil et leur correction sont souvent mal compris. La notion de schéma équivalent est rarement mise en œuvre pour simplifier les discussions.

Il faut savoir mettre en évidence l'énergie minimale non nulle d'une particule dans un puits infini à partir de l'inégalité spatiale d'Heisenberg.

- Oscillateur harmonique
- Équation différentielle caractéristique de l'oscillateur harmonique
- Solution de l'équation différentielle
- Amplitude, phase, pulsation, période, fréquence
- Signal acoustique

- Signal électrique
- Signal électromagnétique
- Fréquence audibles
- Fréquence des UV, IR, visible, Rayons X, rayons γ , ondes hertziennes
- Onde plane progressive suivant les x croissants
- Onde plane progressive suivant les x décroissants
- Onde progressive sinusoïdale : relation entre fréquence, longueur d'onde et célérité
- Représentation de Fresnel
- Notion d'interférences
- Interférences constructives
- Interférence destructives
- Battements
- Ondes stationnaires
- Nœuds, ventres, modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités
- Diffraction : relation entre l'angle diffracté, la longueur d'onde et la taille de l'ouverture
- Polarisation rectiligne
- Loi de Malus
- Source lumineuse
- Source ponctuelle monochromatique
- Indice d'un milieu
- Approximation de l'optique géométrique
- Rayon lumineux
- Lois de Descartes à la réfraction

- Lois de Descartes à la réflexion
- Condition de réflexion totale
- Miroir plan et construction géométrique
- Stigmatisme approché
- Conditions de Gauss
- Lentilles minces et construction géométriques
- Formules de conjugaison et grandissement d'une lentille mince (savoir les utiliser)
- Savoir tracer les rayons utiles pour des associations de lentilles ou miroirs
- Modélisation de l'œil
- Dualité onde-particule pour la lumière et la matière
- Relation de Planck-Einstein
- Relation de Louis de Broglie
- Fonction d'onde
- Inégalité de Heisenberg spatiale
- Énergie minimale de l'oscillateur harmonique quantique
- Particule libre confinée dans un puits infini et quantification de l'énergie

2) Électricité

Rapport du jury 2016

L'exploitation d'un diagramme de Bode ou de l'enregistrement d'un régime transitoire n'est que rarement bien menée. Il est pourtant attendu d'un candidat qu'il sache déterminer les grandeurs caractéristiques d'un filtre (facteur de qualité, pulsation propre...) à partir de l'exploitation d'un diagramme de Bode.

Rapport du jury 2017

La notion de gabarit d'un filtre est mal connue. La détermination de la réponse d'un système linéaire (fonction de transfert fournie) à une excitation comportant un nombre fini de termes sinusoïdaux donne rarement satisfaction. La détermination de l'intensité efficace d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé doit être obtenue dans un temps raisonnable (≤ 1 mn) !

- Charge électrique
- Intensité du courant
- Potentiel
- Référence de potentiel
- Tension
- Puissance
- Résistance et ordre de grandeur
- Condensateur et ordre de grandeur de la capacité
- Bobine et ordre de grandeur de l'inductance
- Loi des mailles
- Loi des nœuds
- Diviseur de tension
- Diviseur de courant
- Puissance dissipée par effet Joule
- Énergie stockée dans un condensateur
- Énergie stockée dans une bobine
- Source de Thévenin
- Résistance équivalente à deux résistances en série
- Résistance équivalente à deux résistances en parallèle
- Résistance de sortie

- Résistance d'entrée
- Point de fonctionnement
- Circuit linéaire du premier ordre
- Équation différentielle du premier ordre
- Condition initiale dans un condensateur
- Condition initiale dans une bobine
- Bilan énergétique pour un circuit RC ou RL
- Circuit RLC
- Oscillateur harmonique amorti
- Équation différentielle du deuxième ordre
- Pulsation propre
- Facteur de qualité
- Résolution de l'équation du deuxième ordre
- Régime sinusoïdal forcé
- Impédance complexe d'un résistor, d'un condensateur, d'une bobine
- Impédance équivalente de deux impédances en parallèle ou en série
- Résonance
- Signal périodique
- Fonction de transfert
- Gain en décibels
- Diagramme de Bode
- Pulsation de coupure
- Gabarit
- Filtre passe bas

- Filtre passe haut
- Filtre passe bande

3) Mécanique

Rapport du jury 2017

Le théorème du moment cinétique est souvent mal écrit, même dans des cas simples (rotation d'une barre autour d'un axe fixe). Le poids de l'objet A en contact avec l'objet B ne " s'applique " pas sur B : il faut faire intervenir la réaction qui n'est pas a priori l'opposée du poids... Les candidats oublient parfois que pour les lois de Coulomb, lorsqu'il y a glissement, la réaction tangentielle est de même direction et de sens opposé à la vitesse de glissement. D'une manière générale, de nombreuses erreurs de projection des forces et des moments sont à déplorer. La volonté affichée de déterminer ces grandeurs « avec les mains » - plutôt qu'avec un formalisme mathématique rigoureux, est finalement préjudiciable aux candidats. Beaucoup de candidats ne pensent toujours pas à la conservation de l'énergie mécanique totale pour des systèmes qui ne dépendent pourtant que d'un paramètre. Accélération nulle n'est pas « synonyme » d'une absence de mouvement ! Les vitesses cosmiques sont souvent inconnues. L'étude du « pendule simple » ne peut se limiter aux petites oscillations.

Conseils du jury 2017

Dans l'ensemble la mécanique du point est mal maîtrisée. Dans les exercices avec contact, beaucoup de candidats oublient la réaction du support. L'introduction d'un ressort, surtout s'il est vertical, pose toujours des difficultés : rappelons que trois schémas avec la situation à vide puis à l'équilibre puis en mouvement permettent d'avoir une approche plus claire du rôle du ressort. La détermination du rayon de la trajectoire (en la supposant circulaire) d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme donne encore des démonstrations surprenantes. Nous rappelons qu'il est inutile de repasser par les coordonnées cartésiennes et qu'on peut par exemple appliquer le principe fondamental de la dynamique en norme. Quand elle est possible, la méthode énergétique est trop peu employée, notamment pour les systèmes soumis à une force centrale conservative. Le calcul et l'utilisation de l'énergie potentielle effective posent d'ailleurs bien des difficultés. Concernant les oscillateurs harmoniques amortis, une grande confusion règne entre régime d'oscillations pseudo-périodique (en régime libre) et résonance en amplitude (en régime sinusoïdal forcé). La valeur du facteur de qualité est mal interprétée et peu de candidats savent par exemple que, pour $Q > 4$, celui-ci est de l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations d'une réponse indicielle ou la valeur du gain maximal en régime sinusoïdal forcé.

- Référentiel
- Vecteur position

- Vecteur vitesse
- Vecteur accélération
- Coordonnées cartésiennes
- Coordonnées cylindriques
- Coordonnées sphériques
- Mouvement de vecteur accélération constant
- Mouvement circulaire uniforme
- Mouvement circulaire non uniforme
- Solide
- Solide en translation
- Translation rectiligne
- Translation circulaire
- Solide en rotation autour d'un axe fixe
- Vitesse angulaire
- Force
- Principe des actions réciproques
- Quantité de mouvement d'un point
- Quantité de mouvement d'un système de points
- Référentiel galiléen et principe de l'inertie
- Loi de la quantité de mouvement ou deuxième loi de Newton
- Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme
- Pendule simple
- Lois de Coulomb du frottement de glissement d'un solide en translation
- Puissance d'une force

- Travail d'une force
- Loi de l'énergie cinétique
- Loi de la puissance cinétique
- Énergie potentielle
- Énergie mécanique
- Force conservative
- Position d'équilibre
- Stabilité d'un équilibre
- Conditions initiales
- Petits mouvements autour d'une position d'équilibre
- Force de Lorentz
- Puissance de la force de Lorentz
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme
- Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique
- Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point
- Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté
- Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté
- Moment d'inertie d'un solide
- Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté
- Couple
- Liaison pivot
- Loi du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen
- Loi scalaire du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen

- Pendule de torsion
- Pendule pesant
- Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe
- Loi de l'énergie cinétique pour un solide
- Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable
- Force centrale
- Loi des aires
- Propriétés des mouvements à force centrale
- Énergie potentielle effective
- État lié
- État de diffusion
- Force d'interaction entre deux masses
- Champ Newtonien
- Lois de Kepler
- Mouvement circulaire d'un satellite
- Satellite géostationnaire
- Énergie mécanique pour un mouvement circulaire du satellite
- Énergie mécanique pour un mouvement elliptique du satellite
- Première vitesse cosmique ou vitesse d'orbite basse
- Deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération terrestre
- Force exercée sur un ressort
- Énergie potentielle élastique du ressort
- Équation d'un oscillateur harmonique
- Condition d'équilibre stable en fonction de l'énergie potentielle

4) Thermodynamique

Rapport du jury 2011

Les mêmes erreurs concernant les machines thermiques se retrouvent chaque année : les définitions de rendement et d'efficacité sont en général erronées.

Les changements d'état continuent à mettre mal à l'aise de nombreux candidats.

Rapport du jury 2017

On relève également beaucoup de confusions entre adiabatique et isentropique. Dans l'étude d'une machine thermique cyclique, le sens des échanges thermiques avec les thermostats est souvent mal compris.

Conseils du jury 2017

En thermodynamique, si les candidats pensent désormais à bien préciser le système sur lequel, ils appliquent le premier ou le second principe, il faut encore insister sur un point : la lecture de l'énoncé ! Une analyse préalable du texte en relevant les termes essentiels (adiabatique, calorifugé, diathermane...), en s'interrogeant sur l'état initial et l'état final, sur les grandeurs demandées les conduirait certainement à plus de discernement. Demander un bilan entropique met toujours de nombreux candidats en difficulté, car le second principe est mal compris.

- Échelle macroscopique, microscopique, mésoscopique
- Libre parcours moyen
- Vitesse quadratique moyenne
- Pression cinétique
- Température cinétique d'un gaz
- Relation entre vitesse quadratique moyenne et température pour un gaz parfait
- Système thermodynamique, système ouvert, système fermé, système isolé
- Équation d'état
- Grandeurs intensives
- Grandeurs extensives
- Énergie interne d'un gaz parfait
- Capacité thermique à volume constant pour le gaz parfait

- Énergie interne d'une phase condensée
- Capacité thermique à volume constant pour une phase condensée incompressible et indilatable
- Gaz réel
- Diagramme de phase (P, T)
- Diagramme de phase (P, v)
- Équilibre liquide-vapeur de l'eau en présence d'une atmosphère inerte
- Transformation thermodynamique
- Transformation isochore
- Transformation isobare
- Transformation monobare
- Transformation isotherme
- Transformation monotherme
- Travail des forces de pression
- Transfert thermique
- Transformation adiabatique
- Thermostat
- Premier principe de la thermodynamique pour un système fermé
- Enthalpie
- Capacité thermique à pression constante pour le gaz parfait
- Capacité thermique à pression constante pour le fluide incompressible et indilatable
- Enthalpie de fusion
- Enthalpie de vaporisation
- Enthalpie de sublimation

- Variation d'enthalpie pour un changement d'état du corps pur
- Deuxième principe de la thermodynamique pour un système fermé
- Entropie créée
- Entropie échangée
- Variation d'entropie pour un liquide
- Variation d'entropie pour un gaz parfait
- Variation d'entropie pour un changement d'état du corps pur
- Loi de Laplace
- Machine thermique
- Rendement d'un moteur thermique
- Efficacité d'une pompe à chaleur ou réfrigérateur
- Théorème de Carnot
- Premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement (système ouvert) (PCSI)
- Diagrammes de changement d'état du corps pur (P, h) (PCSI)

5) Statique des fluides (PCSI-MP-PSI-PT)

Rapport du jury 2017

Le calcul d'une résultante de force de pression est souvent un casse-tête, car les candidats se contentent de la formule, réfléchissent insuffisamment aux coordonnées les mieux adaptées et oublient d'utiliser les symétries.

- Forces surfaciques
- Forces volumiques
- Équation de la statique des fluides
- Loi de pression pour un fluide incompressible
- Loi de pression pour l'atmosphère isotherme
- Facteur de Boltzmann

- Résultante des forces de pression
- Poussée d'Archimède
- Équivalent volumique des forces de pression

6) Induction

Rapport du jury 2016

L'induction et ses problèmes d'orientation restent un point faible. Une analyse physique de la situation doit toujours précéder les calculs, ce qui est rarement le cas.

Rapport du jury 2017

Sur des exercices d'induction, certains candidats n'orientent pas le courant et ne représentent pas le schéma électrique équivalent. On attend des candidats une analyse physique de la situation. Les questions de cours portant sur l'induction laissent souvent à désirer : les candidats doivent penser à détailler les processus électriques et mécaniques en jeu (variation du flux magnétique donc force électromotrice, donc courant induit, donc action mécanique...) et vérifier la loi de modération de Lenz.

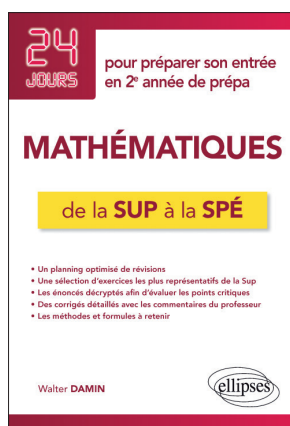
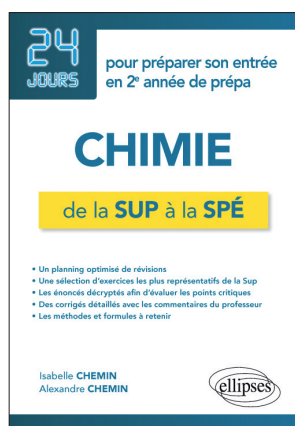
- Source de champ magnétique
- Cartes de champ magnétique
- Champ magnétique au voisinage d'un aimant
- Champ magnétique terrestre
- Champ magnétique dans un appareil d'IRM
- Lien entre le champ magnétique et le courant
- Moment magnétique
- Densité linéique de la force de Laplace
- Force de Laplace pour une tige
- Puissance de la force de Laplace pour une tige
- Couple de la force de Laplace pour une spire en rotation
- Puissance de la force de Laplace pour la spire en rotation
- Action d'un champ magnétique extérieur sur un aimant

- Position d'équilibre et stabilité du moment magnétique dans le champ magnétique extérieur
- Flux du champ magnétique
- Loi de Faraday
- Loi de Lenz
- Force électromotrice induite
- Flux propre
- Auto-inductance ou inductance propre
- Inductance mutuelle entre deux circuits
- Transformateur de tension
- Rail de Laplace
- Freinage par induction
- Courants de Foucault
- Moteur à courant continu à entrefer plan
- Haut-parleur électrodynamique

La collection « 24 jours pour préparer son entrée en 2^e année de prépa » vous assure des révisions solides entre la Sup et la Spé grâce au planning de travail fourni par les auteurs expérimentés. Ce planning est fondé sur 24 séances de travail permettant de balayer le programme de Sup. Durant chaque séance, vous vous exercez sur un sujet puis vous vous consacrez à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé (analyse de l'énoncé, corrigé détaillé, techniques à mémoriser, formulaire et nombreux extraits des rapports de jurys).

Cette collection vous permet donc, dès la fin de la Sup, de vous préparer efficacement aux concours d'entrée dans les Grandes Écoles.

Dans la même collection



www.editions-ellipses.fr

